Maximum- és minimumproblémák elemi tárgyalása.

I.

Alapfogalmak.

Ha két *változó értékű* mennyiséget x-et és y-t oly módon kapcsolunk össze, hogy az egyik változó bizonyos meghatározott értékét vagy értékrendszerét tudjuk meghatározni, akkor azt mondjuk, hogy y az x-nek függvénye. Ezen függést a következő symbolikus egyenlettel fejezzük ki:

$$y = f(x)$$

Az x-et független, az y-t függő változónak nevezzük.

Tegyük fel, hogy x a-tól b-ig növekedő értékeket vesz fel egymásután és c oly érték, melyre nézve a következő egyenlőtlenségek állanak fenn:

$$a < c < b.$$

Ha ekkor $y f(a)$-tól $f(c)$-ig folytonosan növekszik és $f(c)$-től $f(b)$-ig folytonosan fogy, akkor az $y = f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy az $x = c$ értéknél *maximumát* éri el.

Ha megfordítva $y = f(a)$-tól $f(c)$-ig fogy és $f(c)$-től $f(b)$-ig nő, akkor az $x = c$ értéknél *minimumon* megy át. Különben mi sem akadályozza azon feltevést, hogy az y , míg az x a-tól b-ig növekszik több maximum- és minimumon ne menjen át.

II.

Hogy valamely függvény maximális vagy minimális értékét megtalálhassuk, x-et bizonyos határok között kell változtatnunk és y-nak megfelelő változásait figyelemmel kell kísérnünk. Ezen eljárás, bár legtermészetesebbnek látszik, korántsem eszközölhető az elemi mathematika segédeszközeivel. Sok esetben azonban ezen eljárás mással helyettesíthető, mely végeredményében *másodfokú* egyenlet megoldását kívánja. Ezen eljárást mutassuk be néhány példában.

1. *Kerestetik az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú egész függvény maximuma vagy minimuma.*

Írjuk fel az

$$ax^2 + bx + c - y = 0 \tag{1}$$

egyenletet és kérdezzük az y mely értékeinél lesznek gyökei valósak. A gyökök alakjából

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \tag{2}$$

folyik, hogy ez akkor következik be, ha

$$b^2 - 4ac + 4ay \geqq 0$$

$$4ay \geqq 4ac - b^2 \tag{3}$$

Ha $a > 0$ a (3) alatti egyenletből

$$y \geqq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

vagyis y *nagyobb* vagy legfeljebb egyenlő $\frac{4ac - b^2}{4a}$-val. Ez utóbbi érték tehát y-nak minimuma.

Ha $a < 0$ a (3) alatti egyenletből

$$y \leqq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

azaz y legnagyobb értéke $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Ugyanekkor $x = -\frac{b}{2a}$ mindkét esetben.

Összefoglalás Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény maximum vagy minimum midőn $x = -\frac{b}{2a}$. A maximum vagy minimum akkor következik be, ha $a \lesseqgtr 0$ és értéke ekkor $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

2. *Kerestetik az*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

függvény maximuma vagy minimuma.

Írjuk fel az

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} - y = 0 \tag{1}$$

egyenletet és kérdezzük az y mely értékeinél lesznek gyökei valósak.

Tegyük fel egyelőre, hogy az

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

és

$$a'x^2 + b'\ x + c' = 0 \tag{3}$$

egyenleteknek nincsen közös gyökük. Ekkor az (1) alatti egyenlet gyökei azonosak az

$$(a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0 \tag{4}$$

egyenlet gyökeivel. A (3) alatti egyenlet egyik gyöke sem lehet a (4) gyöke, mert ekkor a (2) gyöke is volna. Így tehát a (4) egyik gyöke sem lehet a (3) gyöke és így az (1) és (4) alatti egyenletek gyökei azonosak.

A (4) alatti egyenlet gyökei

$$x = \frac{-(b - b'y) \pm \sqrt{(b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y)}}{2(a - a'y)} \tag{5}$$

A gyökjel alatt álló mennyiség y-nak fogyó hatványai szerint rendezve

$$Ay^2 + By + C$$

hol

$$A = b'^2 - 4a'c'$$

$$B = 4(ac' + ca') - 2bb'$$

$$C = b^2 - 4ac$$

x tehát akkor valós, ha $Ay^2 + By + C \geqq 0$.

Első eset.

$$B^2 - 4AC > 0$$

Az

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

egyenlet gyökei valósak és

$$D = Ay^2 + By + C = A(y - y')(y - y'')$$

hol

$$y' < y''$$

A

$$D \geqq 0, \text{ ha}$$

$$1) A > 0$$

és

$$y \leqq y' < y''$$

vagy

$$y \geqq y'' > y'$$

vagy ha

$$2) A < 0$$

és

$$y' \leqq y \leqq y''$$

Az első esetben y' maximum és y'' minimum; a másodikban y' minimum és y'' maximum.

Az x értékei, melynél e minimumok vagy maximumok bekövetkeznek

$$x = \frac{-(b - b'y)}{2(a - a'y)}$$

hol y helyébe egyszer y', másszor y''írandó.

Második eset.

$$B^2 - 4AC < 0$$

Az

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

egyenlet gyökei complex számok és

$$D = Ay^2 + By + C = A(y - p - qi)(y - p + qi)$$

$$= A\{(y - p)^2 + q^2\}$$

Ha $A < 0$, D mindíg kisebb a nullánál; hogy $D \geqq 0$ legyen, kell, hogy $A \geqq 0$. Ha $A > 0$, D mindíg nagyobb nullánál és y sohasem lesz maximum vagy minimum. Ha $A = 0$ akkor

$$D = By + C = B\left(y + \frac{C}{B}\right).$$

Ha $B > 0$, D akkor $\geqq 0$

midőn

$$y + \frac{C}{B} \geqq 0$$

$$y \geqq -\frac{C}{B}$$

$y' = -\frac{C}{B}$ ez esetre minimum.

Ha $B < 0$, D akkor $\geqq 0$

midőn

$$y + \frac{C}{B} \leqq 0$$

$$y \leqq -\frac{C}{B}$$

$y'' = -\frac{C}{B}$ ez esetre maximum.

Harmadik eset.

$$B^2 - 4AC = 0$$

Az

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

egyenlet gyökei valósak és egyenlők. $D = Ay^2 + By + C = A\left(y + \frac{B}{2A}\right)^2$

Ha $A < 0$, D mindíg kisebb a nullánál; ha $A > 0, D$ mindíg nagyobb a nullánál és y sohasem lesz maximum vagy minimum.

Minthogy

$$B^2 - 4AC = 16(\beta^2 - \alpha\gamma) = 0$$

hol

$$\beta = ac' - ca'$$

$$\gamma = ab' - ba'$$

$$\alpha = bc' - cb'$$

az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

és

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

egyenletnek legalább egy közös gyökük van. A harmadik esettel tehát el van intézve egyszersmind azon egyelőre mellőzött eset, melyben a 2) és 3) egyenleteknek közös gyökük van.

(Folyatjuk).