A másodfoku egyenlet diszkussziója.

I.

Legyen $F_(x) = ax^2 + bx + c = 0$ és $\delta = b^2 - 4ac$, akkor mint ismeretes az egyenletnek két valós gyöke van ha $\delta \geq 0$.

Tegyük fel, hogy $\delta > 0$ és x' meg x" az egyenlet két gyöke, $x' < x$", akkor

$$F(x) = a(x - x')(x - x").$$

Ha x helyett x'-nél kisebb számot írunk, akkor $x - x'$ negatív és $x - x$" még inkább az, tehát $F(x)$ olyan jelű, mint a.

Ha x helyébe a két gyök között fekvő számot írunk, akkor $x - x'$ pozitív és $x - x$" negatív, tehát $F(x)$ olyan előjelű mint -a.

Ha végre x-et x"-nél nagyobb számokkal helyettesítjük, akkor $x - x'$ és $x - x$" pozitív és így $F(x)$ olyan jelű mint a.

Legyen $\delta = 0$ akkor $F(x) = a(x - x')^2$ ekkor x bármely értékénél $F(x)$ olyan előjelű mint a.

Ha pedig $\delta < 0$ akkor

$$F(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a(M^2 + N^2)$$

x bármely értékénél a zárójelben lévő kifejezés pozitív és így $F(x)$ olyan előjelű, mint a.

Tehát ha $F(\alpha)$ és a előjelre nézve megegyeznek, akkor α a gyökökön kívül fekszik, ha pedig $F(\alpha)$ olyan előjelű mint $-a$, akkor α a gyökök között fekszik.

II.

Minthogy a gyökök összege $= -\frac{b}{a}$, azért áll a következő: Feltéve, hogy α a gyököknél kisebb, úgy $\alpha < -\frac{b}{2a}$ azaz α kisebb a gyökök félösszegénél; ha pedig β nagyobb a gyökök bármelyikénél, úgy $\beta > -\frac{b}{2a}$, ennélfogva, ha

$$\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$$

akkor a gyökök α és β között feküsznek.

III.

Ha két szám között az egyenlet *egyik* gyöke fekszik, akkor azt mondjuk, a két szám a gyököket *elkülöníti. Hogy* α *és* β *az* $F(x) = ax^2 + bx + c = 0$ *egyenlet gyökeit elkülönítse, arra szükséges és elegendő feltétel, hogy* $F(\alpha)$ *és* $F(\beta)$ *ellenkező előjelűek legyenek.* A feltétel szükséges, mert az elkülönítés esetében α vagy β a két gyök között fekszik pl. α és akkor β a két gyökön kívül fekszik, tehát akkor $F(\alpha)$ előjele megegyezik $-a$-val, $F(\beta)$ pedig $+a$-val. De a föltétel elegendő is, mert ha $F(\alpha)$ és $F(\beta)$ ellenkező előjelű úgy egyik $-a$-val megyegyezik. Ekkor pedig a gyökök valósak és különbözők és $F(\alpha)$ vagy $F(\beta)$ a gyökök között fekszik.

IV.

P. Keressük, hogy az

$$(a + b + c)x^2 - 2(ab + bc + ac)x + 3abc = 0$$

egyenlet gyökei, mily határok között feküsznek.

$$F(a) = (a+b+c)a^2 - 2(ab+bc+ac)a + 3\,abc = a[a^2+ab+ac-2ab-2bc-2ac+3bc] = a(a^2-ab-ac+bc) = a(a-b)(a-c).$$

Épp így

$$F(b) = b(b - c)(b - a) \text{ és}$$

$$F(c) = c(c - a)(c - b).$$

Legyen $a < b < c$

$F(a)$ előjele olyan mint $+a$
$F(b)$ előjele olyan mint $-b$
$F(c)$ előjele olyan mint $+c$
$F(a)$ és $F(b)$ ellenkező előjelűek és
$F(b)$ és $F(c)$ ellenkező előjelűek

tehát a gyökök valósak, különbözők és elkülöníttetnek a, b és c által.

Schey Lipót.
főreálisk. tanár Győrött.