Az állítást r szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $r=1$-gyel az állítások a sorozatpár $k+1$-edik tagjainak új értelmezését ismétlik meg, tehát helyesek. Feltesszük, hogy valamely $r=s$ értékre (1) helyes, vagyis

$$x_{k+s}=x_s y_k+y_s x_k \quad \text{és} \quad y_{k+s}=y_s y_k+2x_s x_k, \tag{2}$$

és bebizonyítjuk, hogy helyes r helyén $s+1$-gyel is.

Az új értelmezés szerint, majd a (2) indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned} x_{k+(s+1)}=x_{(k+s)+1}=x_1 y_{k+s}+y_1 x_{k+s}=x_1(y_s y_k+2x_s x_k)+y_1(x_s y_k+y_s x_k)= \\ =(x_1 y_s+y_1 x_s)y_k+(y_1 y_s+2x_1 x_s)x_k, \end{aligned}$$

és felismerve, hogy az utolsó alak zárójeles kifejezései x_{s+1}, ill. y_{s+1}-gyel egyenlők, adódik

$$x_{k+(s+1)}=x_{s+1}y_k+y_{s+1}x_k,$$

vagyis (2) első állítása helyes. – Hasonlóan

$$\begin{aligned} y_{k+(s+1)}=y_{(k+s)+1}=y_1 y_{(k+s)}+2x_1 x_{k+s}=y_1(y_s y_k+2x_s x_k)+2x_1(x_s y_k+y_s x_k)= \\ =(y_1 y_s+2x_1 x_s)y_k+2(x_1 y_s+y_1 x_s)x_k=y_{s+1}y_k+2x_{s+1}x_k. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Rohrböck Krisztina (Budapest, Móricz Zs. g. IV. o. t.-Lorántffy Zs. út)

Megjegyzés. Néhány dolgozat annak megmutatásával vélte bebizonyítani az állítást, hogy ha x_k, y_k, és x_r, y_r a szóban forgó sorozatpárnak ugyanazon sorszámú tag-párjai, és így megvan az 539. gyakorlatban bebizonyított tulajdonságuk: kielégítik a $2x^2+1-y^2=0$ egyenletet –, akkor ez a tulajdonsága megvan a belőlük képezett $x_r y_k+y_r x_k$, $y_r y_k+2x_r x_k$ számpárnak is:

$$\begin{aligned} 2(x_r y_k+y_r x_k)^2+1-(y_r y_k+2x_r x_k)^2=2x_r^2 y_k^2+2y_r^2 x_k^2+1-y_r^2 y_k^2-4x_r^2 x_k^2= \\ =2x_r^2(y_k^2-2x_k^2)+y_r^2(2x_k^2-y_k^2)+1=(y_k^2-2x_k^2)(2x_r^2-y_r^2)+1=1\cdot(-1)+1=0. \end{aligned}$$

E meggondolásnak lényeges hiánya az, hogy feltételezi a következő állítás helyességét: „minden a $2x^2+1-y^2=0$ egyenletet kielégítő egész számpár tagjai ugyanazon sorszámmal szerepelnek a szóban forgó sorozatpárban”, más szóval azt, hogy az 539. gyakorlat állítása megfordítható. A hiányt pótolni sem lehet, mert az állítás nem igaz, a mondott egyenletet pl. a 0; 1 számpár is kielégíti, továbbá a 2; -3, a -2; 3 párok is.