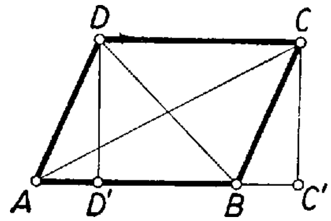
I. megoldás: Előkészítésül bebizonyítjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. Ez derékszögű paralelogrammára a Püthagorász-tétel alapján nyilvánvaló. Legyen az $ABCD$ ferdeszögű paralelogramma betűzése olyan, hogy a hegyesszögek csúcsai A és C, és az AB oldal nem kisebb AD-nél, legyen továbbá C, D (derékszögű) vetülete az AB oldalegyenesen C', D' (1. ábra).



1. ábra

Ekkor D' az AB szakaszon van, C' pedig e szakasz B-n túli meghosszabbításán, ezért $AC' = AB + BC'$ és $D'B = AB - AD'$, továbbá $BC' = AD'$ és $AB = DC$. Így az átlók négyzetei az $AC'C$ és $BD'D$ derékszögű háromszögekből:

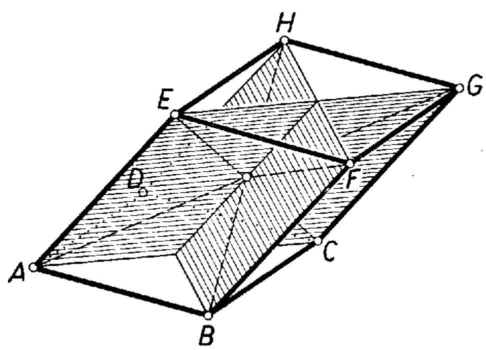
$$\begin{aligned} AC^2 &= AC'^2 + C'C^2 = AB^2 + 2AB \cdot BC' + (BC'^2 + C'C^2) = \\ &= AB^2 + 2AB \cdot AD' + BC^2, \\ BD^2 &= D'B^2 + D'D^2 = AB^2 - 2AB \cdot AD' + (AD'^2 + D'D^2) = \\ &= DC^2 - 2AB \cdot AD' + AD^2, \end{aligned}$$

tehát összegükre fennáll

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2 + AD^2 + BC^2, \tag{1}$$

amit bizonyítani akartunk.

Legyen az $ABCD$ paralelogrammát alaplapként tartalmazó $ABCDEFGH = P$ paralelepipedon betűzése olyan, hogy az oldalélek AE, BF, CG és DH, tehát ezek párhuzamosak és egyenlők (2. ábra).



2. ábra

Így P testátlói az AG, BH, CE és DF szakaszok. Alkalmazzuk a fenti segédtételt P-nek $ACGE$ és $BFHD$ átlós síkmetszeteire, amelyek paralelogrammák, és átlóik az AG és CE, ill. BH és DF testátlópárok, majd adjuk össze az egyenlőségeket:

$$\begin{gathered} AG^2 + CE^2 = AC^2 + EG^2 + AE^2 + CG^2, \\ BH^2 + DF^2 = BD^2 + FH^2 + BF^2 + DH^2, \\ S = AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = (AC^2 + BD^2) + (EG^2 + FH^2) + \\ +(AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2). \end{gathered}$$

Itt ugyancsak a segédtétel alapján az első zárójel helyett (1) jobb oldalát, a második zárójel helyett pedig az $EFGH$ paralelogramma oldalainak négyzetösszegét írva az állítást igazoltuk, ugyanis

$$\begin{gathered} S = (AB^2 + DC^2 + AD^2 + BC^2) + (EF^2 + HG^2 + EH^2 + FG^2) + \\ +(AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2) = \\ = (AB^2 + DC^2 + HG^2 + EF^2) + (AD^2 + BC^2 + FG^2 + EH^2) + \\ +(AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2), \end{gathered}$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Szalay Gábor (Budapest, I. László g. III. o. t.)

II. megoldás: Az állítás vektoralgebrai úton is igazolható. [1] Legyen az A csúcsból a szomszédos B, D, E csúcsba mutató élvektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, ekkor az átlók vektorai

$$\overrightarrow{AG}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c},\quad \overrightarrow{BH}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c},\quad \overrightarrow{CE}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c},\quad \overrightarrow{DF}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c},$$

és így négyzetösszegük:

$$\begin{aligned}S&=(AG^2+BH^2)+(CE^2+DF^2)=\left[(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{a})^2+(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})^2\right]+\\&+\left[(\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a})^2\right]=\left[2(\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+2\mathbf{a}^2\right]+\left[2(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2+\right.\\&\left.+2\mathbf{a}^2\right]=4\mathbf{a}^2+2\left[(\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2\right]=4\mathbf{a}^2+2\left[2\mathbf{b}^2+2\mathbf{c}^2\right]=4(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2).\end{aligned}$$

Páska Csaba (Budapest, I. István g. III. o. t.)

[1] A felhasznált fogalmakat lásd pl. *Hajós–Neukomm–Surányi:* Matematikai Versenytételek II. (Középiskolai Szakköri Füzetek) Tankönyvkiadó, 1957. 26–30. o.