

I. megoldás: A feltevésnél fogva egyik szög koszinusza sem 0, így a bizonyítandó

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma > 5 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

egyenlőtlenség mindkét oldalát oszthatjuk a koszinuszok szorzatával, ezért elegendő azt megmutatni, hogy

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma > 5.$$

Ismeretes, hogy a bármely nem derékszögű háromszög szögeinek tangenséből képezett összeg és szorzat egyenlők:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Belátható ez a tangens-függvény összeadási tételéből, az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ összefüggésre támaszkodva, ha vesszük a

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} [180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{-\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

egyenlőség-sorozat szélső kifejezéseinek egyenlőségét, és azt átrendezzük.) Feltevésünknel fogva mindhárom tangens pozitív, így számtani közepük nem kisebb a mértani közepüknél:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}.$$

Innen az összeget (2) alapján a szorzattal helyettesítve, majd köbreemeléssel és osztással, végül a jobb oldal csökkenésével

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma \geq 27 > 25$$

adódik, ebből pedig négyzetgyökvonással (1)-re jutunk.

(Felhasználtuk, hogy két pozitív szám közül a nagyobbak a köbe nagyobb.)

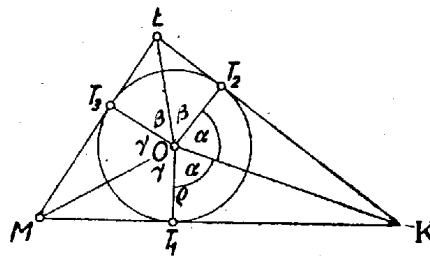
Szoboszlai Levente (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat állítása minden háromszögre érvényes. Ugyanis derékszögű háromszögekre a koszinuszok szorzata 0, tompaszögűekre pedig negatív – mert a tompaszög koszinusza negatív –, viszont a háromszög bármelyik szögének szinusza pozitív, és így ugyanez áll szorzatukra is.

Náray Szabó Gábor (Budapest, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: Ismert tétel, hogy egy adott kör köré írt háromszögek közül a szabályos háromszögnek van a legkisebb kerülete. Ennek felhasználásával az állítás így is bizonyítható:

Legyenek egy tetszés szerinti hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ . Mérjük fel egy ρ sugarú k kör OT_1 sugarától kezdve egymás után az $\alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma$ nagyságú szögeket úgy, hogy valamennyi szög csúcsa az O középpont legyen.



1. ábra

Ekkor a második γ szög második szára OT_1 -be esik. Messe k -t a szomszédos α és β szögek közös szára T_2 -ben, a szomszédos β és γ szögek közös szára T_3 -ban. Húzzuk meg k érintőit T_1, T_2, T_3 -ban. Nyilvánvaló, hogy e három érintő a szomszédos α, α , ill. β, β ill. γ, γ nagyságú szögek közös szarát páronként ugyanazon K , ill. L , ill. M pontban metszi (1. ábra), és hogy a KLM háromszög k köré van írva, ezért $KT_1 = KT_2$, $LT_2 = LT_3$, $MT_3 = MT_1$. A létrejött derékszögű háromszögekből

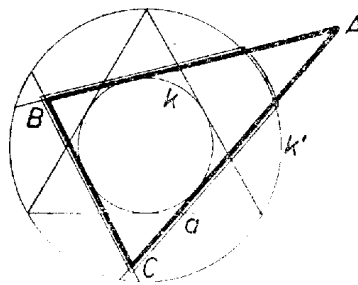
$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \frac{KT_1}{\rho} + \frac{LT_2}{\rho} + \frac{MT_3}{\rho} = \frac{s}{\rho},$$

ahol s a KLM háromszög kerületének felét jelöli. Másrészt az idézett tétel szerint (a -val jelölve a k köré írható szabályos háromszög oldalát):

$$\frac{s}{\rho} \geq \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} > 5,$$

amiből (2) és (3) figyelembevételével (1) adódik.

Megjegyzés. A felhasznált tétel akárhány oldalú sokszögre érvényes,¹ háromszögre az alábbiak szerint látható be. $t = \rho s$ folytán elég megmutatni, hogy adott k kör köré írt háromszögek közül a szabályos területe a legkisebb. Legyen egy k köré írt szabályos háromszög oldala a , körülírt köre (amely korcentrkus k -val) k' (2. ábra).



2. ábra

Egy a k köré írt, tetszés szerinti, nem szabályos ABC háromszög oldalegyeneseinek ugyancsak a hosszúságú húrjai esnek k' -be, így abból ugyanakkora körszeleteket és köríveket metszenek le, mint a szabályos háromszög oldalai, a körívek hossza egyenlő a kör kerületének harmadrészével. A lemetszett ívek részben fedik egymást, különben ABC szabályos háromszög volna. Ezért a lemetszett körszeletek is részben fedik egymást, így pedig az ABC háromszögnek már a k' -be eső része nagyobb területű, mint az a oldalú szabályos háromszög (és pedig annyival nagyobb, amennyi a három körszelet által kétszer lefedett terület).

¹Lásd Fejes Tóth László: Körbe és kör köré írt sokszögekről. *Matematikai Lapok*, X. évf. (1959), 23–25. l.