I. megoldás: A bal oldal két szélső tagjának, ill. két közbülső tagjának összegét a

$$\operatorname{tg}\, u+\operatorname{tg}\, v=\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{\sin u\,\cos v+\cos u\,\sin v}{\cos u\,\cos v}=\frac{\sin(u+v)}{\cos u\,\cos v}$$

azonosság alapján átalakítva egyenletünk így alakul:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg}\, x+\operatorname{tg}\, 4x)+(\operatorname{tg}\, 2x+\operatorname{tg}\, 3x)&=\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}=\\ &=\sin 5x\frac{\cos x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x}{\cos x\,\cos 2x\,\cos 3x\,\cos 4x}=0.\end{aligned}$$

A számlálóban $\sin 2u=2\sin u\cos u$ és $\cos 2u=2\cos^2 u-1=1-2\sin^2 u$ alapján

$$\begin{aligned}\cos 3x&=\cos(2x+x)+\cos 2x\,\cos x-\sin 2x\,\sin x=\\ &=\cos x(\cos 2x-2\sin^2 x)=\cos x\left[\cos 2x-(1-\cos 2x)\right]=\\ &=\cos x(2\cos 2x-1),\\ \cos 4x&=\cos 2\cdot 2x=2\cos^2 2x-1.\end{aligned}$$

Ezek alapján $\cos x$-szel egyszerűsítve (ami $\neq 0$, mert $\cos x=0$ esetén $\operatorname{tg}\, x$ nincs értelmezve)

$$\sin 5x\frac{\cos 4x+\cos 2x(2\cos 2x-1)}{\cos 2x\,\cos 3x\,\cos 4x}=\frac{\sin 5x(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)}{\cos 2x\,\cos 3x\,\cos 4x}=0.$$

Eszerint x csak olyan szög lehet, amely mellett a számláló 0, vagyis amely kielégíti a

$$a)\ \sin 5x=0 \qquad \text{és} \qquad b)\ 4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$$

egyenleteknek legalább egyikét. És minden ilyen szög gyöke az adott egyenletnek (hacsak vele a nevező nem válik zérussá, amikor az adott egyenlet legalább egy tagjának nincs értelme), mert csak ekvivalens átalakításokat végeztünk.

Végső soron elég lesz egy 180° hosszúságú intervallumba, pl. a -90° és 90° közé eső gyököket megadni (a végpontokat mellőzve, mivel ott $\operatorname{tg}\, x$ úgy sincs értelmezve), mert a $\operatorname{tg}\, x$ függvény legkisebb periódusa 180°, a $\operatorname{tg}\, 2x$, $\operatorname{tg}\, 3x$, $\operatorname{tg}\, 4x$ legkisebb periódusa pedig 180°-nak fele, 3-ada, 4-ede, tehát 180° az egyenlet bal oldala mindnégy tagjának periódusa; viszont *b)* megoldásában tekintetbe kell vennünk, hogy a koszinusz-függvény legkisebb periódusa 360°.

Így *a)* gyökei $5x=k\cdot 180^\circ$, $x=k\cdot 36^\circ$-ból 0°, 36°, 72°, 108°, 144°; és *b)* olyan gyökei, amelyekre $-180^\circ<2x<180^\circ$:

$$\cos 2x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}\approx\begin{cases}+0{,}6404\\ -0{,}3904\end{cases}\text{-ből}$$

$$2x\approx\begin{cases}\pm\ \ 50{,}18^\circ,\\ \pm\ 112{,}98^\circ,\end{cases}\qquad\qquad x\approx\begin{cases}\pm\ 25{,}09^\circ,\\ \pm\ 56{,}49^\circ.\end{cases}$$

Ezek szerint abszolút értékük növekvő sorrendjében csak a következő szögek lehetnek gyökei az egyenletnek:

$$0^\circ,\quad \pm 25{,}09^\circ,\quad \pm 36^\circ,\quad \pm 56{,}49^\circ,\quad \pm 72^\circ.$$

Mindegyikük mellett az egyenlet mindegyik tagja értelmezve van, ezért mindegyik valóban gyök. Ezúttal próbát csak a számítások ellenőrzése céljára végzünk, ebben elég pl. a 0° és 90° közti értékeket kipróbálni, mert ha x gyöke az egyenletnek, akkor nyilván $-x$ is gyök.

Veres Gyula (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)

II. megoldás: Fejezzük ki $\operatorname{tg}\, 2x$, $\operatorname{tg}\, 3x$, $\operatorname{tg}\, 4x$-et $\operatorname{tg}\, x=z$-vel:

$$\operatorname{tg}\, 2x=\frac{2\operatorname{tg}\, x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2z}{1-z^2},$$

$$\operatorname{tg}\, 4x=\frac{2\operatorname{tg}\, 2x}{1-\operatorname{tg}^2\, 2x}=\frac{\dfrac{4z}{1-z^2}}{1-\dfrac{4z^2}{(1-z^2)^2}}=\frac{4z(1-z^2)}{1-6z^2+z^4},$$

$$\operatorname{tg}\, 3x=\operatorname{tg}\,(2x+x)=\frac{\operatorname{tg}\, 2x+\operatorname{tg}\, x}{1-\operatorname{tg}\, x\,\operatorname{tg}\, 2x}=\frac{\dfrac{2z}{1-z^2}+z}{1-\dfrac{2z^2}{1-z^2}}=\frac{z(3-z^2)}{1-3z^2},$$

így az egyenlet:

$$z\left(1+\frac{2}{1-z^2}+\frac{3-z^2}{1-3z^2}+\frac{4-4z^2}{1-6z^2+z^4}\right)=0. \tag{1}$$

Eszerint egy gyök $z_1=0$ és ebből a nyitott $(-90^\circ,\ 90^\circ)$ intervallumban $x_1=0^\circ$, a további gyökök pedig (1) négytagújából adódnak. Ebben ismét páronkénti összeadással (szélsők, közbülsők) a két összegnek közös tényezője van:

$$\frac{5-10z^2+z^4}{1-6z^2+z^4}+\frac{5-10z^2+z^4}{(1-z^2)(1-3z^2)}=$$
$$=(5-10z^2+z^4)\left(\frac{1}{1-6z^2+z^4}+\frac{1}{1-4z^2+3z^4}\right)=0,$$

és ez lehetővé teszi a gyökök könnyű kiszámítását.

$$z^4-10z^2+5=0\text{-ból}\, z=\pm\sqrt{\frac{10\mp\sqrt{80}}{2}}=\pm\sqrt{5\mp 2\sqrt5}\approx\begin{cases}\pm 0{,}7265,\\ \pm 3{,}078,\end{cases}$$

és így $x_{2,3}\approx\pm 36{,}0^\circ$, $x_{4,5}\approx 72{,}0^\circ$; másrészt a kéttagú összegből

$$\frac{2-10z^2+4z^4}{(1-6z^2+z^4)(1-4z^2+3z^4)}=0,\ \text{azaz}\ 2-10z^2+4z^4=0\text{-ból}$$

$$z=\pm\sqrt{5\mp\sqrt{17}}/2,\quad z_1\approx\pm 0{,}4682,\quad z_2\approx\pm 1{,}510,$$

tehát $x_{6,7}\approx\pm 25{,}09^\circ$, $x_{8,9}\approx 56{,}48^\circ$, megegyezésben az I. megoldással.

Farkas Henrik (Eger, Dobó I. g. IV. o. t.)