Rendezzük az adott összefüggést így:

$$a^2 - b^2 = c\left[(a-c)^2 - (b-c)^2\right] = c(a-b)(a+b-2c).$$

Az $a \neq b$ feltevés alapján $a-b$-vel osztva

$$a + b = c(a+b) - 2c^2,$$

és innen

$$a+b = \frac{2c^2}{c-1} = \frac{2\left[(c-1)+1\right]^2}{c-1} = 2(c-1) + 4 + \frac{2}{c-1} == 2c + 2 + \frac{2}{c-1}. \tag{1}$$

Ez az egyenlőség egész a, b, c-vel csak úgy állhat fenn, ha $c-1$ osztója 2-nek, vagyis $c-1$ értéke vagy 1, vagy 2.

Az első esetben $c = 2$ és (1)-ből $a + b = 8$, másrészt a háromszög-egyenlőtlenségből $|a-b| < c = 2$, végül a feltevésből $a \neq b$, azaz $a - b \neq 0$. E három követelmény nem teljesíthető, mert $a+b$ párosságából következik, hogy $a-b$ is páros, és $c = 2$-nél kisebb abszolút értékű páros szám csak a 0.

A második esetben hasonlóan $c = 3$, $a + b = 9$, $0 < |a-b| < 3$, és $a+b$ páratlansága folytán $a-b$ is páratlan. Eszerint $|a-b| = 1$, amiből $a = 5$, $b = 4$ (ugyanis az adott összefüggés a, b-ben szimmetrikus, feltehetjük, hogy $a > b$).

Így a háromszög egyértelműen meg van határozva. Ismeretes, hogy a 3, 4, 5 egységnyi oldalakkal bíró háromszög derékszögű („egyiptomi háromszög”), területe a $c = 3$ és $b = 4$ befogókból 6 egység, és így legkisebb, az $a = 5$ átfogóhoz tartozó magassága $12/5 = 2{,}4$ egység.

Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi D. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. A c oldal értékére szóba jövő számokat (1)-nek $a + b = 2c^2/(c-1)$ alakjából is megkaphatjuk. Ugyanis $c^2 = cc$ és $c - 1$ relatív prímek, így$c - 1$ osztója 2-nek.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn. II. o. t.)