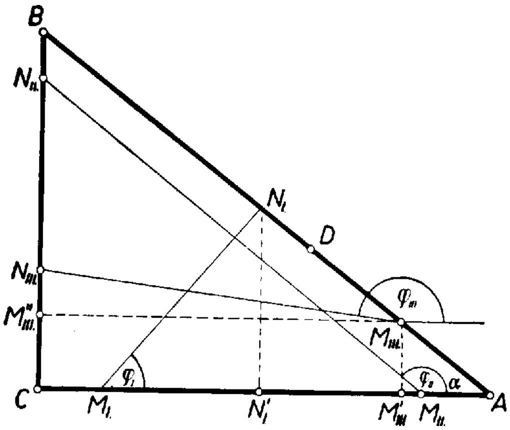
1. Az ABC háromszög oldalainak aránya $3:4:5$, ezért a háromszög C-nél levő szöge derékszög, továbbá a szokásos jelölésekkel $\sin\alpha=\cos\beta=0{,}6$, $\cos\alpha=0{,}8$ A háromszög kerülete 360 m, C és D távolsága a kerületen mérve 180 m, így a mozgó pontok soha sincsenek a háromszög ugyanazon oldalán és egyszerre haladnak át egymás kiinduló pontján. Elég a mozgást eddig az áthaladásig vizsgálni, a további mozgás ismétlése az addiginak M és N szerepének megcserélésével, ami nem lényeges módosítás.



1. ábra

Válasszuk egységnek azt az időtartamot, amennyi alatt a pontok 1 m utat megtesznek. Így a mozgás kezdetétől eltelt idő és az addig megtett út mértékszámai megegyeznek, és a mozgásokat $t=0$-tól $t=180$-ig kell vizsgálnunk.

Ezt az időközt a mozgó pontoknak a háromszög csúcsaiban bekövetkező irányváltozásai miatt részekre kell bontanunk. M az A-ban, N pedig B-ben változtat irányt éspedig más-más időpontban: $t=120$-kor, ill. $t=90$-kor, így három rész-időszak adódik: I: $(0;90)$, II: $(90,120)$, III: $(120;180)$. Ezekben M és N rendre a b, c, a b, a és a c, a oldalpárokon van, ezért d távolságukat rendre az MNA, az MNC, az MNB háromszögből számíthatjuk. Bármely t időpontra megadhatjuk M és N távolságát e háromszögek állandó csúcsától, továbbá ismerjük az állandó csúcsoknál levő szögeket, ezért MN-t, ill. MN^2-et a koszinusz-tétellel fejezzük ki.

I-ben $CM=t$, $AM=120-t$, és $AN=60+t$, ennélfogva MNA-ból:

(1)
$$d^2=(120-t)^2+(60+t)^2-2\cdot 0{,}8(120-t)(60+t)= \\ =3{,}6t^2-216\,t+6480=3{,}6(t-30)^2+3240.$$

II-ben továbbra is $CM=t$, másrészt $BN=t-90$, $CN=90-BN=180-t$, tehát

(2)
$$d^2=t^2+(180-t)^2=2(t-90)^2+16\,200.$$

III-ban pedig $AM=t-120$, és így $BM=150-AM=270-t$, másrészt $BN=t-90$, ezért

(3)
$$d^2=(270-t)^2+(t-90)^2-2\cdot 0{,}6(270-t)(t-90)= \\ =3{,}2(180-t)^2+6480.$$

Az (1) másodfokú függvény a $(0;30)$ részidőszakban csökken, $(30;90)$-ben nő, $t=30$-kor minimuma van, ekkor $d_{30}\sqrt{3240}\approx 56{,}9$ m, $t=0$-kor $d_0=\sqrt{6480}\approx 80{,}5$ m, $t=90$-kor $d_{90}=\sqrt{16\,200}\approx 127{,}3$ m.

A (2) másodfokú függvénynek $t=90$-kor, az érvényességi időszak kezdőpontjában van minimuma és abból d_{90} egyenlő az (1)-ből kapott értékkel; a függvény értéke az időszak folyamán nő, legnagyobb értéke $d_{120}=\sqrt{1800}\approx 134{,}2$ m.

Végül a (3) másodfokú függvény az érvényességi időszak egész folyamán csökken, és így $t=180$-nál minimuma van: $d_{180}=\sqrt{6480}(=d_0)$.

Ezek szerint M és N távolsága $t=30$-kor a legkisebb, $t=120$-kor a legnagyobb.

2. Az MN irány változásának leírásához vegyük alapiránynak CA irányát. Az MN és CA közti φ szöget mindegyik időszakban tangense alapján számítjuk, rendre az NMN', az NMC, ill. az NMM'' derékszögű háromszögből, ahol N' az N vetülete CA-n, M'' az M vetülete CB-n; III-ban felhasználjuk M-nek CA-n levő M' vetületét is.

I-ben $AN=60+t$, így $AN'=0{,}8\,AN=48+0{,}8\,t$, $N'N=0{,}6\,AN=36+0{,}6\,t$, másrészt $CM=t$, ezért $MN'=CA-CM-AN'=72-1{,}8\,t$, és ezekből $\operatorname{tg}\varphi=N'N/MN'=(60+t)(120-3t)$.

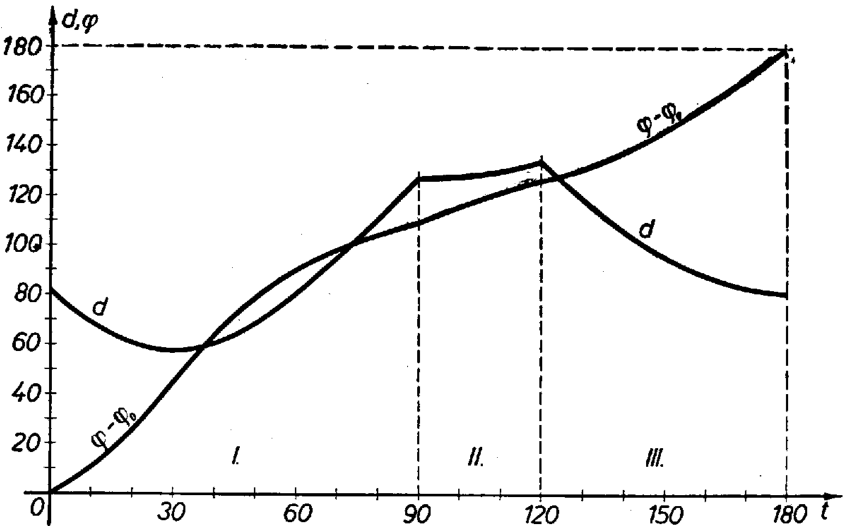
II-ben $\operatorname{tg}\varphi=-CN/CM=-(180-t)/t=1-180/t$.

III-ban $CN=180-t$, $AM=t-120$, $M'M=CM''=0{,}6\,AM=0{,}6\,t-72$, $AM'=0{,}8\,AM=0{,}8\,t-96$, $M''M=CM'=216-0{,}8\,t$, ezekből $M''N=CN-CM''=252-1{,}6\,t$, és így $\operatorname{tg}\varphi=-M''N/M''M=(2t-315)/(270-t)$.

Ezek alapján φ kívánt értékei és a lépésről lépésre beállott változások a következők:

	t	tg φ	φ	változás
I.	0	1/2	26,6°	
	10	7/9	37,9	11,3°
	20	4/3	53,1	15,2
	30	3	71,6	18,5
	40	nincs	90,0	18,4
	50	−11/3	105,3	15,3
	60	−2	116,6	11,3
	70	−13/9	124,7	8,1
	80	−7/6	130,6	5,9
	90	−1	135,0	4,4

	t	tg φ	φ	változás
II.	90	−1	135,0°	
III.	100	−8/10	141,3	6,3°
	110	−7/11	147,5	6,2
	120	−1/2	153,4	5,9
	130	−11/28	158,6	5,2
	140	−7/26	164,9	6,3
	150	−1/8	172,9	8,0
	160	+1/22	182,6	9,7
	170	1/4	194,0	11,4
	180	1/2	206,6	12,6



2. ábra

Ezek szerint az irány változása nem egyenletes, leggyorsabbnak látszik a változás $t=30$ körül, amikor d a legkisebb, és leglassúbbnak $t=120$ körül, amikor d a legnagyobb.

Marót Ildikó (Budapest, Veres Pálné lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az MN irány változásának pusztán a grafikon szemléletére alapított vizsgálata néhány dolgozat megjegyzése szerint nem kielégítő, nem elég pontos, „kísérleti” jellege van. Ez az aggály a középiskolák tananyagát és lapunk szokásos feladatait tekintve megérthető, de másrészt vitatható is. A matematika történetében is előfordult, hogy egyes tudósok (természetesen nagyobb kérdésekben) elzárkóztak „közelítő”, „grafikus”, „mechanikus” eljárások alkalmazása elől, a fejlődés azonban ezt az álláspontot túlhaladta. Számos közelítő eljárásból idővel pontos módszerek alakultak ki, az ún. felsőbb matematika módszereivel kérdésünk is pontosan vizsgálható. Ez azonban nem zárja ki a fenti, kevesebb ismeretet felhasználó megállapítás létjogosultságát. – A kérdést éppen azért vetettük fel, hogy olvasóink lássanak példát egyszerű megállapítások kimondására grafikonjával megadott függvény esetében.

2. Annál kevésbé elvetendő a fenti eljárás, mert pontossága további pontoknak a grafikonba való beiktatásával tetszés szerint fokozható. Efféle esetekben ugyanis – miután a változásokról nagy vonásokban képet kaptunk, a több figyelmet érdemlő szakaszokat részletesebben kidolgozhatjuk. Erre példaként bemutatjuk a fent leggyorsabb, ill. leglassúbb változásúnak adódott pontok egy-egy környezetének 2 egységenkénti sűrítését, „finomítását”. Ezek megerősítik fenti megállapításunkat.

t	φ	változás
20	53,13°	
22	56,63	3,50°
24	60,26	3,63
26	63,97	3,71
28	67,76	3,79
30	71,57	3,81
32	75,38	3,81
34	79,16	3,78
36	82,87	3,71
38	86,50	3,63
40	90,00	3,50

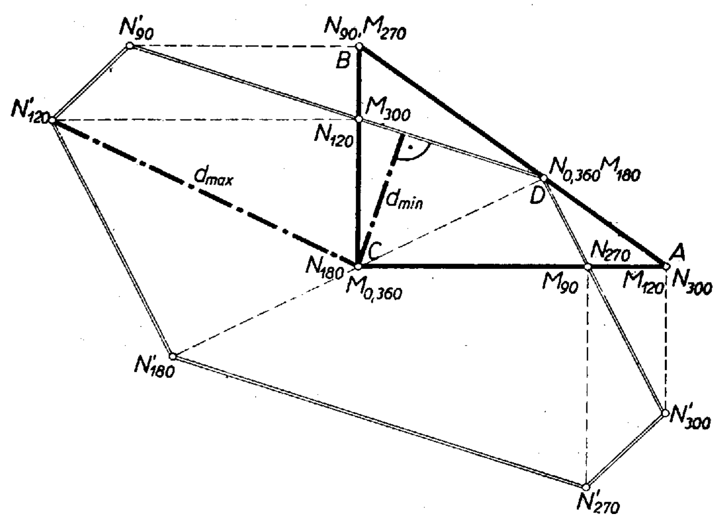
	t	φ	változás
	110	147,53°	
	112	148,73	1,20°
	114	149,93	1,20
	116	151,11	1,18
	118	152,28	1,17
III.	120	153,43	1,15
	122	154,37	0,94
	124	155,35	0,98
	126	156,37	1,02
	128	157,44	1,07
	130	158,55	1,11

3. Több dolgozat szerint grafikonjaink „nem folytonosak". A folytonosságnak a felsőbb matematikában adott pontos fogalma szerint a grafikonok folytonosak – és szemléletesen is, ha azt tekintjük, hogy az íróeszköz felemelése nélkül megrajzolhatók, – Amit e dolgozatok mondani kívánnak, azt így szokás kifejezni: a csatlakozási pontokban törésük van. Az irányt ábrázoló grafikonon ez alig látszik, de a táblázatokból kivehető, hogy $t = 90$-nél a változás mértéke kissé nagyobb lesz, $t = 120$-nál pedig kisebbé válik.

4. Több versenyző nem φ változásáról készített grafikont, hanem $\operatorname{tg}\varphi$-éről. Ez a kitűzött kérdés szempontjából nem használható, mert belőle nem olvashatók ki a fenti megállapítások, másrészt mert nem lehet teljes, harmadrészt mert az alapirány szükségképpeni megválasztása folytán egy önkényes, de a kérdés szempontjából lényegtelen elemnek jelentős szerepet juttat. Ugyanis az MN irányra eltolás erejéig akkor is a közölt grafikon adódik, ha alapiránynak más, pl. az ugyancsak kézenfekvő CD irányt vesszük, amelyre $\operatorname{tg}\varphi_0 = 1/2$, – viszont $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)$ grafikonja egészen más képet mutatna; ennek kifejezése az I–III időszakokban rendre:

$$t/(60-t), \qquad (t-360)/(3t-180), \qquad -4+t/45.$$

5. M és N távolságának és összekötő irányának változását egy más grafikus módszerrel úgy is leírhatjuk, mintha M állna, N pedig az M-hez viszonyított sebességével: $c' = c_N - c_M$-mel mozogna (a sebességeket természetesen iránnyal együtt, vektoriálisan értve). c' az I–III időszakokban külön-külön állandó, ezért N-nek a C-ben állónak tekintett M-hez képest leírt pályája megrajzolásához elég N-nek változó N'_t helyzetét $t = 90, 120, 180, 270, 300, 360$-ra megszerkeszteni $\overrightarrow{CN'_t} = \overrightarrow{CN_t} - \overrightarrow{CM_t}$ alapján, ezekből a pályát az egymás utáni pontok egyenes összekötésével kapjuk.



3. ábra

A 3. ábrából bármely t-re leolvashatjuk d és φ értékét.

Pinkert András (Budapest, Eötvös J. g. III. o. t.)

6. A 3. ábrába N'_t-nek $t = 0, 10, 20, 22, 24, \ldots, 38, 40, 50, 60$-beli helyzetét berajzolva szemléletesen igazolódik a táblázatok $t = 30$ körüli változás-adatainak (a kerekítés erejéig való) szimmetriája. Ez természetesen számítással is igazolható.