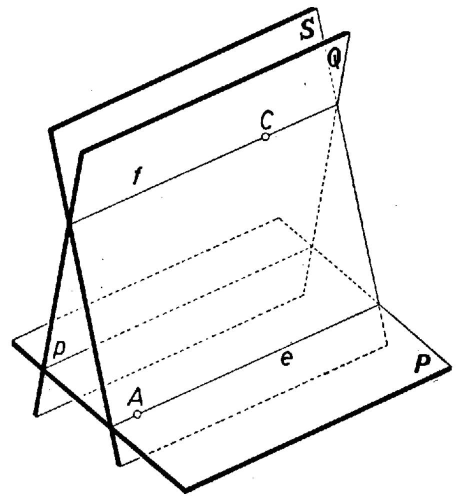
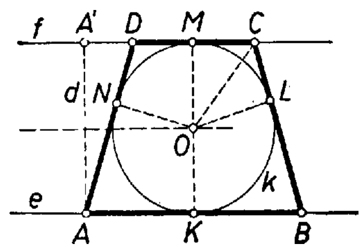
A keresett trapéz S síkja metszi P-t, mert van pontja P-ben: A és van pontja P-n kívül: C; a metszésvonal éppen a meghatározandó $AB = e$ egyenes. Ugyanígy S a Q-t a keresett $CD = f$ egyenesben metszi. Az e és f egyenesek és velük S párhuzamosak p-vel.



1. ábra

Ha ugyanis pl. AB metszené p-t E-ben, akkor E a Q-nak is pontja volna, tehát S és Q-nak CD metszésvonala azonos lenne CE-vel, vagyis AB és CD metszenék egymást. Ezek szerint e és f egyértelműen megszerkeszthetők, és a feladat úgy egyszerűsödik, hogy B-nek e-n, D-nek f-en kell lennie.

Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyen a trapézba írt kör érintési pontja az egymás utáni AB, BC, CD, DA oldalon rendre K, L, M, N, továbbá A vetülete f-en A'.



2. ábra

A trapéz egyenlő szárú voltából nyilvánvaló, hogy szimmetriatengelye átmegy a beírt kör középpontján, és így K, M-en is, tehát K és M felezik a párhuzamos oldalakat. Másrészt a KM tengely szétválasztja A-t, és C-t, és így A'-t és C-t is. AA' párhuzamos KM-mel, ezért $MA' = KA$; a szimmetriából $KA = KB$, végül a B és C-ből húzott érintőszakaszok egyenlőségéből $KB = LB$ és $CM = CL$. Ezekből egyrészt $MA' = LB$, másrészt összeadással $CA' = CM + MA' = CL + LB = CB$. Eszerint B rajta van a C körül CA' sugárral írt körön. B-t ismerve D-t a C-nek AB felező merőlegesére való tükörképe adja meg. Így eljárást kaptunk a keresett trapéz megszerkesztésére.

Az $ABCD$ trapéz megfelel a követelményeknek. Ugyanis benne $AB \parallel CD$, $AD = BC$, továbbá AA' felező merőlegese és az $A'CB$ szög felezője metszéspontját O-val jelölve az O körül $AA'/2$ sugárral írt k kör érinti egyrészt e-t és f-et K, M-ben, és KM átmegy O-n és merőleges e, f-re, másrészt f-et és BC-t is érinti k, tehát $KB = LB = CB - CL = CA' - CM = MA' = KA$, így a KM egyenes az AB szakasz felező merőlegese, ennélfogva AD – mint a BC tükörképe KM-re – ugyancsak érinti k-t.

B-re 2, 1, ill. 0 megoldást kapunk aszerint, hogy a C körül CA' sugárral írt kör metszi, érinti, ill. nem metszi e-t, más szóval, hogy CA' nagyobb, egyenlő, ill. kisebb az e, f, egyenespár $d = AA'$ távolságánál. B-ből D szerkesztése mindig egyértelmű. Ha $CA' = d$, akkor az $ABCD$ idom derékszögű érintőtrapéz, vagyis négyzet.

Várady Gábor (Győr, Révai M. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldásban „szokásos értelemben vett” egyenlő szárú trapézt szerkesztettünk, vagyis feltettük, hogy annak a két oldalnak, melyekről tudjuk, hogy párhuzamosak, közös a felező merőlegese, tehát ez egyben szimmetriatengelye a négyszögnek. Tartsuk számon azonban, hogy az említett feltevés kizárja az egyenlő szárú trapéz fogalomköréből a paralelogrammákat, holott ezeknek is megvannak az egyenlő szárú trapézt meghatározó tulajdonságaik: egyik pár szemben fekvő oldaluk párhuzamos, a másik pár pedig egyenlő hosszú. Ha mármost egyenlő szárú érintőtrapézként érintőparalelogrammát, azaz rombuszt is elfogadunk, akkor B és D-t az AC felező merőlegese metszi ki e, ill. f-ből, vagyis a megoldás egyértelmű és mindig létezik, hacsak nem AC merőleges e-re.

2. Bár sokkal elterjedtebb *szokás* síkidomok leírása céljára a csúcsaikhoz írt betűket az idom valamelyik körüljárása mentén talált egymás utánjukban felsorolni, – még sincs kimondva, hogy a felsorolások csak így érthetők. (Szögletes testek ilyen értelmű körüljárása általában nem is lehetséges.) Szórványosan előfordul az is, hogy a paralelogrammák, trapézok csúcsait jelölő betűket a két párhuzamos oldalon ugyanazon irányban végighaladva sorolják fel. Ilyen értelemben az adott A, C pontpár a keresett trapéz egyik szárának végpontjait is adhatja.

Így a trapézból ismerjük három egymás utáni oldal egyenesét, vagyis az idom két szögét, tehát e két szög felezőinek metszéspontjában megkapjuk a beírt kör O középpontját, majd A-t és C-t tükrözve az O-n átmenő, e-re merőleges egyenesen, megkapjuk B-t, D-t. (Az 1. megjegyzés szerinti rombusz-megoldás B, D-csúcsát pedig az említett szögfelezők metszik ki.)

Náray-Szabó Gábor (Budapest, József A. Gimn. III. o. t.)