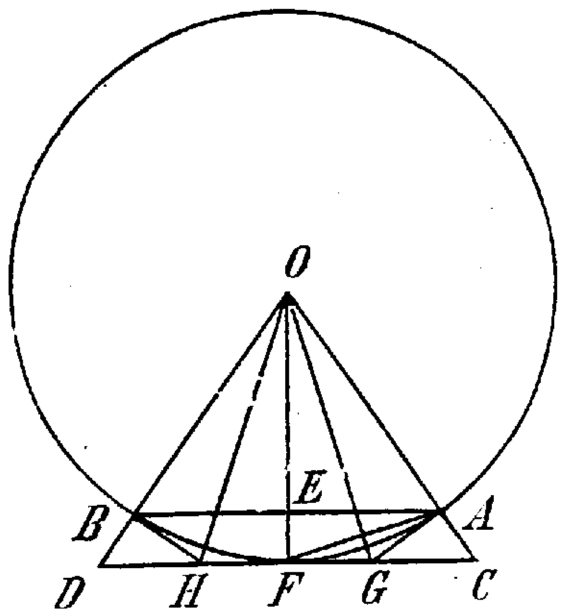
A kör területe K a körbe és a kör körül ért szabályos sokszögek területének J_n és C_n-nek határértéke. Az az a

$$K - J_n \text{ és } C_n - K$$

külömbségek annál jobban megközelítik a 0-t, minél nagyobb az n, a körbe és a kör körül írt szabályos sokszögek oldalainak száma.

Jelen sorok czélja egyszerű bizonyítását adni azon eljárásnak, mellyel a $2n$-oldalú sokszögek területeinek kiszámítása történik, ha advák az n-oldalú beírt és körülírt sokszögek területei J_n és C_n.



A körbe és a kör körül írt szabályos n és $2n$ oldalú sokszögek területe az ABO, CDO és AFO, GHO egyenlőszárú háromszögek n, illetőleg $2n$-szeresei.

Vagyis

$$J_n = n \cdot ABO = n \cdot AE \cdot EO.$$

$$C_n = n \cdot CDO = n \cdot CF \cdot FO.$$

$$J_{2n} = 2n \cdot AFO = n \cdot AE \cdot FO.$$

és

$$C_{2n} = 2n \cdot GHO = 2n \cdot GF \cdot FO.$$

Ennélfogva

$$J_n C_n = n^2 \cdot AE \cdot EO \cdot CF \cdot FO$$

és

$$J_n^2 = n^2\, \overline{AE}^2 \cdot \overline{FO}^2.$$

Az AEO és CFO háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$AE : EO = CF : FO$$

$$\text{és } AE \cdot FO = EO \cdot CF$$

Vagyis

$$J_n C_n = n^2\, \overline{AE}^2 \cdot \overline{FO}^2,$$

$$JnC_n = J_{2n}^2,$$

(1) $$J_{2n}^{-1} = \left\{ J_n^{-1} C_n^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Az OG egyenes felezi az OFC szöget. Ennélfogva

$$FG : GC = FO : OC.$$

$$FG : FC = FO : (FO + OC).$$

$$FG = \frac{FC \cdot FO}{FO + OC}$$
$$\overline{FG}^{-1} = \frac{FO + OC}{FC \cdot FO} = \overline{FC}^{-1} + \frac{OC}{FC \cdot FO}$$
De ugyancsak az előbbi háromszög hasonlóságából következik, hogy:
$$OC : FC = OA : EA,$$
$$OA = FO;$$
tehát
$$EA = \frac{FC \cdot FO}{OC},$$
$$EA^{-1} = \frac{OC}{FC \cdot FO},$$
s így
$$FG^{-1} = FC^{-1} + EA^{-1}.$$
Ha ezen egyenletet megszorozzuk $1 : 2nFO$-val, lesz belőle
$$\frac{1}{2n \cdot GF \cdot FO} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{n \cdot CF \cdot FO} + \frac{1}{n \cdot AE \cdot FO}\Big\},$$

(2) $$C_{2n}^{-1} = \tfrac{1}{2}\Big\{C_n^{-1} + J_{2n}^{-1}\Big\}$$

A kör területének kiszámítására az J_4 és C_4 értékekből indulunk ki. Kérdés, meddig kell a számítást folytatnom, hogy a
$$K - J_{2(k+2)}\ ,\ C_{2(k+2} - K$$
külömbségek kisebbek legyenek $1 : 10^n$-nél.
$$J_{2n}^{-1} = J_n^{-\frac{1}{2}} C_n^{-\frac{1}{2}},$$
$$C_{2n}^{-1} = \tfrac{1}{2}C_n^{-1} + \tfrac{1}{2}J_{2n}^{-1},$$
$$= \tfrac{1}{2}C_n^{-1} + \tfrac{1}{2}J_n^{-\frac{1}{2}}C_n^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}C_n^{-\frac{1}{2}}\Big(C_n^{-\frac{1}{2}} + J_n^{-\frac{1}{2}}\Big).$$
$$J_{2n}^{-1} - C_{2n}^{-1} = \frac{1}{2}C_n^{-\frac{1}{2}}\Big\{J_n^{-\frac{1}{2}} - C_n^{-\frac{1}{2}}\Big\},$$
$$J_{2n}^{-1} - C_{2n}^{-1} = \frac{1}{2}\frac{C_n^{-\frac{1}{2}}}{J_n^{-\frac{1}{2}} + C_n^{-\frac{1}{2}}}\big\{J_n^{-1} - C_n^{-1}\big\},$$
$$\frac{C_{2n} - J_{2n}}{J_{2n}C_{2n}} = \frac{1}{2}\frac{C_n^{-\frac{1}{2}}}{2C_{2n}^{-1} : C_n^{-\frac{1}{2}}}\frac{C_n - J_n}{J_nC_n}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{C_{2n}}{C_n}\frac{C_n - J_n}{J_{2n}^2}$$
$$C_{2n} - J_{2n} = \frac{1}{4}\frac{C_{2n}^2}{C_nJ_{2n}}\big\{C_n - J_n\big\}.$$
$$C_{2n}^{-1} = \frac{C_n + J_{2n}}{2C_nJ_{2n}}$$
$$\frac{C_{2n}^2}{C_nJ_{2n}} = \frac{4C_nJ_{2n}}{(C_n + J_{2n})^2} = \left\{\frac{\sqrt{C_nJ_{2n}}}{\frac{C_n+J_{2n}}{2}}\right\}^2$$

Ez utóbbi kifejezés, mint két mennyiség mértani és számtani középarányosai hányadosainak négyzete kisebb az egységnél[1]) s így
$$C_{2n} - J_{2n} < \frac{1}{4}(C_n - J_n).$$

---

[1]
$$(a-b)^2 > 0, a^2 - 2ab + b^2 > 0, a^2 + b^2 > 2ab,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab, (a-b)^2 > 4ab, (\frac{a+b}{2})^2 > ab,$$
$$\frac{a+b}{2 > \sqrt{ab}}.$$ A mi bebizonyítandó volt.

Tehát

$$C_{2(2+k)} - J_{2k} < \frac{1}{4^k}(C_4 - J_4) < \frac{1}{10^n},$$

$$\text{ha} \quad 4^k > 10^n(C_4 - J_4).$$

Ha a $J_4 = 2$, $C_4 = 4$ értékekből indulunk ki és azt akarjuk, hogy a kör területének mérőszáma 5 tizedesre pontos legyen, k-t úgy kell választanunk, hogy

$$4^k > 2, \cdot 10^5$$

a mi bekövetkezik, ha $k \geqq 9$. Vagyis a számítást a 2048 oldalú sokszögekig folytatjuk. A számítás táblázata:

$$J_4 = 1 \ : \ 0,500000 \quad C_4 = 1 \ : \ 0,250000$$

$$J_8 = 1 \ : \ 0,353553 \quad C_8 = 1 \ : \ 0,301776$$

$$J_{16} = 1 \ : \ 0,326640 \quad C_{16} = 1 \ : \ 0,314208$$

$$J_{32} = 1 \ : \ 0,320364 \quad C_{32} = 1 \ : \ 0,317286$$

$$J_{64} = 1 \ : \ 0,318821 \quad C_{64} = 1 \ : \ 0,318054$$

$$J_{128} = 1 \ : \ 0,318437 \quad C_{128} = 1 \ : \ 0,318246$$

$$J_{256} = 1 \ : \ 0,318342 \quad C_{256} = 1 \ : \ 0,318294$$

$$J_{512} = 1 \ : \ 0,318318 \quad C_{256} = 1 \ : \ 0,318306$$

$$J_{1024} = 1 \ : \ 0,318312 \quad C_{1024} = 1 \ : \ 0,318309$$

$$J_{2048} = 1 \ : \ 0,318310 \quad C_{2048} = 1 \ : \ 0,318310$$

$$1 : 0,318310$$

$$\begin{array}{rl} 100000 & 0 \quad : \quad 3.1,8,3,1 \quad = \quad 3{\cdot}14159 \\ 4507 & \cdot 0 \\ 1323 & \cdot 9 \\ 50 & \cdot 6 \\ 18 & \cdot 9 \\ 3 & \cdot 0 \\ & 2 \end{array}$$