A sugarak egyikének mértékszáma sem 0, ezért az adott összefüggés osztással így írható:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1. \tag{1}$$

Másrészt ismeretesek e sugaraknak a háromszög oldalaival, félkerületével és területével való alábbi összefüggései:

$$r=\frac{t}{s},\quad r_1=\frac{t}{s-a},\quad r_2=\frac{t}{s-b},\quad r_3=\frac{t}{s-c}. \tag{2}$$

Ezeket (1)-be helyettesítve, rendezéssel

$$4s-(a+b+c)=2s=t, \tag{3}$$

és ezt a (2)-ből adódó $rs=t$ egyenlőséggel egybevetve $r=2$. Másrészt (2)-ből a Heron-képlet figyelembevételével

$$rr_1r_2r_3=\frac{t^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=t^2, \tag{4}$$

ami négyzetszám, mert (3) szerint az oldalakkal együtt t is egész szám.

$r=2$ alapján (1)-ből

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Feltehetjük, hogy $r_1\le r_2\le r_3$. Így (5) bal oldalába r_2 és r_3 helyett a nem nagyobb r_1-et írva ez az oldal növekszik, vagy változatlan marad:

$$\frac{3}{r_1}\ge\frac{1}{2},\quad \text{amiből}\quad r_1\le 6.$$

Másrészt geometriai jelentésüknél és a párossági feltevésnél fogva $r_1>r$, tehát $r_1\ge 4$, így vagy $r_1=6$, vagy $r_1=4$.

Az első eset nem lehetséges, mert (5) alapján hasonlóan $r_2=r_3=6$-ra vezet, és ezekkel (4) bal oldala $2\cdot 6^3=432$, ami nem négyzetszám. A második esetben

$$\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{1}{4}. \tag{6}$$

Innen egyrészt $r_3>4$, mert különben r_4 nem lehet pozitív, másrészt az előbbiekhez hasonlóan $r_3\le 8$, tehát vagy $r_3=8$, vagy $r_3=6$. Ezek közül az első esetben $r_4=8$, és (4) bal oldala nem teljes négyzet, tehát ilyen megoldás nincs.

Az $r_3=6$ esetben (6)-ból $r_4=12$, így (4)-ből $t=\sqrt{2\cdot 4\cdot 6\cdot 12}=24$ ($t=-24$ nem felel meg), folytatólag (2)-ből:

$$s=12,\quad s-a=6,\quad s-b=4,\quad s-c=2.$$

Így a három oldalra négy egyenletből álló rendszert kaptunk. Ez megoldható, nem ellentmondó, mert az utóbbi három egyenlet összege az első egyenletre vezet:

$$3s-(a+b+c)=s=6+4+2=12,$$

másrészt az oldalakra egész értékrendszert ad, mert az utóbbi három egyenletet az elsőből levonva:

$$a=s-(s-a)=6,\quad \text{és hasonlóan}\quad b=8,\quad c=10.$$

A kapott megoldás derékszögű háromszög, az ismert „egyiptomi háromszög” 2-szerese. Az eddigiekből látható, hogy több megoldás nincs.

Rába Ferenc (Budapest, I. István Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. Az $r=2$ értéket az oldalak, a terület és (2) figyelembevétele nélkül is megállapíthatjuk, a sugarak geometriai jelentéséből csak azt használva fel, hogy $r<r_1$, r_2, r_3. Ezzel ugyanis (1)-ből $4/r>1$, $r<4$ és 4-en alul $r=2$ az egyetlen (pozitív) páros szám. A (2) összefüggések korábbi felhasználása csak azért célszerű, mert (4) könnyen használható feltételt ad a meg nem felelő r értékrendszerek kiválasztására.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn. III. o. t.)

2. Felesleges volna a, b, c megállapítása után azt vizsgálni, eleget tesz-e a 6, 8, 10 számhármas a háromszög-egyenlőtlenségeknek. Ezt $r_1>r$ figyelembe vételével és t értékét pozitívnak véve biztosítottuk. Így ugyanis $s-a$, $s-b$, $s-c$ mindegyike pozitív, és ez azt jelenti, hogy egyik oldal sem éri el a kerület felét, tehát kisebb a további két oldal összegénél.