I. megoldás: Az adott egyenlet ismeretlenét a keresett egyenlet ismeretlenével a következő azonosság kapcsolja össze:

$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}},\ \text{másképpen}\ 2\cos^2 x=1+\cos 2x, \tag{2}$$

(ahol a négyzetgyök előjele külön állapítandó meg abból, hogy x hányadik negyedbe esik). Ezért a keresett egyenletet úgy kaphatjuk meg, hogy (2)-t behelyettesítjük (1)-be és a kapott egyenletből eltávolítjuk a négyzetgyököt. Ez az eljárás ugyanaz, mint ha kifejezzük (1)-ből $\cos x$ első hatványát az együtthatókkal és $\cos^2 x$-szel, ezt négyzetre emeljük és csak ezután helyettesítjük $\cos^2 x$-et (2) második azonossága alapján; így lépésről lépésre

$$\begin{aligned}
-b\cos x&=a\ \cos^2 x+c,\\
b^2\cos^2 x&=a^2\cos^4 x+2ac\ \cos^2 x+c^2,\\
\frac{b^2-2ac}{2}(1+\cos 2x)&=\frac{a^2}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)+c^2,
\end{aligned}$$

és a keresett egyenlet:

$$\frac{1}{4}a^2\cos^2 2x+\frac{1}{2}\left(a^2-b^2+2ac\right)\cos 2x+\frac{1}{4}\left(a^2+4ac+4c^2-2b^2\right)=0. \tag{3}$$

Az adott a, b, c számhármassal (1) és (3) így alakulnak:

$$4\cos^2 x+2\cos x-1=0, \tag{1*}$$

$$4\ \cos^2 2x+2\cos 2x-1=0, \tag{3*}$$

ezek szerint $\cos x$ és $\cos 2x$ ugyanannak az egyenletnek a gyökei. E meglepő ténynek az a magyarázata, hogy a két egyenlet közös $(-1\pm\sqrt{5})/4$ gyökeiből x értékei a $\left(-180^\circ,180^\circ\right)$ intervallumban

$$-144^\circ,-72^\circ,72^\circ,144^\circ,$$

ezekből $2x$ értékei a $\left(-360^\circ,360^\circ\right)$, majd a $\left(-180^\circ,180^\circ\right)$ intervallumban

$$-288^\circ,\ -144^\circ,\ 144^\circ,\ 288^\circ,\quad \text{azaz}\ \ 72^\circ,\ -144^\circ,\ 144^\circ,\ -72^\circ,$$

így a két gyöknégyes csak a felsorolás sorrendjében különbözik.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos Gimn. III. o. t.)

II. megoldás: Legyenek (1) gyökei $(\cos x)_1=z_1$, $(\cos x)_2=z_2$, a keresett

$$A\ \cos^2 2x+B\ \ \cos 2x+C=0 \tag{4}$$

egyenlet gyökei pedig $(\cos 2x)_1=w_1$, $(\cos 2x)_2=w_2$. Így (2) alapján

$$z^2=\frac{1+w}{2},\quad \text{amiből}\quad w_1=2z_1^2-1,\quad w_2=2z_2^2-1. \tag{5}$$

Ezekkel az együtthatókat a gyökökből előállító kifejezések szerint

$$\begin{aligned}
-\frac{B}{A}&=w_1+w_2=2\left(z_1^2+z_2^2\right)-2=\left[2(z_1+z_2)^2-2z_1z_2\right]-2,\\
\frac{C}{A}&=w_1w_2=4z_1^2\cdot z_2^2-2\left(z_1^2+z_2^2\right)+1=4z_1^2\cdot z_2^2-2(z_1+z_2)^2+4z_1z_2+1,
\end{aligned}$$

és mivel $z_1+z_2=-b/a$, és $z_1z_2=c/a$, azért

$$\begin{aligned}
-\frac{B}{A}&=\frac{2b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}-2=\frac{2b^2-4ac-2a^2}{a^2},\\
\frac{C}{A}&=\frac{a^2+4ac+4c^2-2b^2}{a^2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ezekkel, A-t $a^2/4$-nek választva (4)-ből ismét (3)-ra jutunk.

Timár Peregrin (Budapest, Eötvös J. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen megvizsgálták, hogy (1)-nek mely a, b, c értékrendszerek mellett van (valós) megoldása, vagyis olyan, hogy a fenti jelölésekkel a $z_{1,2}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$ gyökök -1 és 1 közé esnek, e határokat is megengedve, és így van olyan x szög, amelyre (1) teljesül. Ebben feltehetjük, hogy $a > 0$. – Mindenekelőtt teljesülnie kell a

$$b^2 - 4ac \geq 0 \tag{7}$$

egyenlőtlenségnek, mert z_1 és z_2 csak így valósak. Ez azt jelenti, hogy (1) bal oldalát $\cos x = z$ függvényének tekintve az $y = az^2 + bz + c$ függvény grafikonjának legmélyebb pontja a Z-tengely (az abszcisszatengely) alatt, vagy magán a tengelyen fekszik. Ugyanis a szimmetria folytán a legmélyebb pont abszcisszája a zérushelyek (gyökök) számtani közepe $z_0 = (z_1 + z_2)/2 = -b/2a$, és így ordinátája: $a(-b/2a)^2 + b(-b/2a) + c = -\big(b^2 - 4ac\big)/4a$, ami (7) szerint negatív, vagy 0.

Mindkét gyök akkor és csak akkor esik -1 és 1 közé, ha egyrészt z_0 e határok közé esik:

$$-1 < -b/2a < 1, \quad \text{másképpen} \quad -2a < -b < 2a,\ |b| < 2a, \tag{8}$$

továbbá a kisebb gyök nagyobb -1-nél, és a nagyobb gyök kisebb 1-nél:

$$-1 < \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 1.$$

Ezekből rendezéssel és négyzetre emeléssel (figyelemmel arra, hogy ha mindkét oldal negatív, akkor négyzetre emelés után az egyenlőtlenség iránya ellentétesre fordul):

$$4a^2 - 4ab + b^2 > b^2 - 4ac, \qquad b^2 - 4ac < 4a^2 + 4ab + b^2.$$

Végül újabb rendezéssel és osztással:

$$a - b + c > 0, \qquad (9') \qquad \text{ill.} \qquad a + b + c > 0, \qquad (9")$$

$(9')$ és $(9'')$ azt írják elő, hogy az $f(z)$ függvény értéke a $z = -1$, ill. $z = 1$ helyen pozitív legyen, vagyis a parabola szemléletére támaszkodva a $(-1; a - b + c)$ és $(1; a + b + c)$ pontok mindegyike az X-tengely fölött legyen.

Ha már most (7), (8), $(9')$ és $(9'')$ teljesülnek, vagyis z_1 és z_2 valósak és -1 és 1 közé esnek, akkor (5) alapján ugyanezek állnak w_1 és w_2-re. Nyilvánvaló ugyanis, hogy így w_1 és w_2 valósak, és ha $i = 1, 2$ esetén

$$-1 < z_i < 1, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq |z_i| < 1,$$

akkor

$$0 \leq z_i^2 < 1, \quad 0 \leq 2z_i^2 < 2, \quad \text{és} \quad -1 \leq 2z_i^2 - 1 = w_i < 1.$$

Mindez úgy is bizonyítható, hogy (7), (8), $(9')$ és $(9'')$-ben a, b, c helyére A, B, C-t írunk és az így kapott egyenlőtlenségek helyes voltának bizonyítására felhasználjuk (6), (7), (8), $(9')$ és $(9'')$-t.

Ezek után könnyen kapunk feltételt arra, hogy (1)-nek pontosan egy gyöke essék -1 és 1 közé. A könnyen megállapítható $z = \pm 1$ gyököt kizárva – ekkor ugyanis $(9')$, ill. $(9'')$ bal oldala 0 – ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy $f(-1)$ és $f(1)$, azaz $(9')$ és $(9'')$ bal oldala ellentett jelűek legyenek, vagyis szorzatuk negatív:

$$(a + c)^2 - b^2 < 0.$$

(Ebből ugyanis átrendezéssel $b^2 - 4ac > (a - c)^2 \geq 0$ következik, vagyis (7) fennáll, (8) megfelelőjére pedig nincs szükség.)

2. Az (1) egyenlet helyett (3)-ból (esetleg az átalakítás ismétlésével $\cos 4x, \cos 8x, \ldots$-re felírt egyenletből) x-et pontosabban határozhatjuk meg az olyan esetekben, ha a koszinusz-függvény $2x$ környezetében gyorsabban változik, mint x környezetében. Legyen pl. x egy a 10° körüli érték. A táblázat egymás utáni adatai között 20° körül nagyobbak az eltérések (a táblabeli különbségek), mint 10° körül, ezért az interpoláció pontosabban, kisebb hibával végezhető, sőt a kisebb hiba még feleződik is, amikor $2x$-ből x-et számítjuk. Még jobbnak látszik e példában $4x$, $8x$-et kiszámítani 40°, 80° környezetében, ahol a koszinusz függvény a leggyorsabban változik. Viszont nem célszerű $16x$-et számítani, mert 160° körül a koszinusz ismét lassan változik. Azonban x körülbelüli értékét (1)-ből meg kell állapítanunk, mert (3)-nak kétszer annyi gyöke van, mint (1)-nek. Pl. a fenti számpéldában

$$2x = \pm 72^\circ \quad \text{és} \quad \pm 432^\circ, \quad \pm 144^\circ \quad \text{és} \quad \pm 504^\circ,$$

tehát

$$x = \pm 36^\circ, \qquad \pm 216^\circ, \qquad \pm 72^\circ \qquad \pm 252^\circ,$$

és ezek közül az eredeti egyenletet csak a 2-ik és 3-ik pár elégíti ki.

Az eljárás gyakorlati alkalmazásában természetesen arra is tekintettel kell lennünk, hogyha a, b, c kerekített adatok, akkor a (6)-ból adódó B, C együtthatók hibája nagyobb lehet. Másrészt előfordulhat, hogy $\cos x_1$ helyett $\cos 2x_1$ célszerűbb, mert abszolút értékben kisebb, viszont $|\cos 2x_2|$ nagyobb $|\cos x_2|$-nél, és így $2x_2$ kevésbé pontosan állapítható meg, mint x_2.