Előzetes megjegyzés. A dolgozatok között az olyanok vannak nagyobb számban, amelyek az állítást trigonometriai számítás útján bizonyítják. Egy ilyen rövid és egyszerű bizonyítás a következő.

I. megoldás: Ismert azonosságok alapján a feltevés átalakításával

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta}=2\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}=\sqrt{2},$$

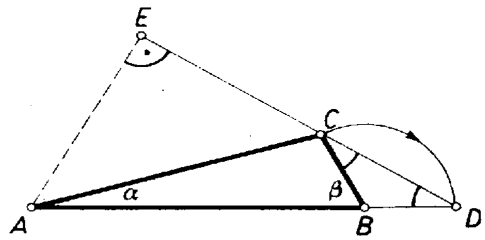
innen $(\gamma-\alpha)/2=45^\circ$ és $\gamma-\alpha=90^\circ$, amit bizonyítanunk kellett.

Pál Gábor (Miskolc, Gábor Á. kohó- és öntőip. t. IV. o. t.)

Sokkal kevesebb előismeret elegendő a megoldáshoz. A továbbiakban ilyen megoldásokat mutatunk be.

II. megoldás: β számtani közepe α és γ-nak, eszerint α,β,γ számtani sorozatot alkotnak. Ilyen számhármas középső tagja az összegüknek harmadrésze, ezért $\beta=60^\circ$. Másrészt a $c>a$ feltevés folytán $\gamma>\alpha$, és így $\alpha<60^\circ<\gamma$.

Forgassuk rá a BC oldalt AB-nek B-n túli meghosszabbítására: $BD=BC=a$, és így $AD=a+c$, másrészt a BCD egyenlő szárú háromszögből $BCD\sphericalangle=BDC\sphericalangle=\beta/2=30^\circ$. Legyen A vetülete a CD egyenesen E.



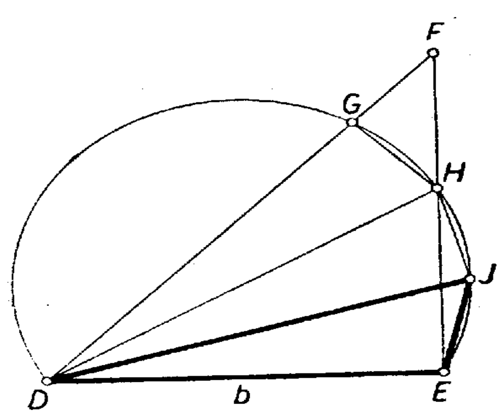
2. ábra

Így az ADE szög 30° és az ADE derékszögű háromszög úgy tekinthető, mintha egy $AD=a+c$ oldalú szabályos háromszögből jött volna létre egy magassággal való kettévágás útján, ezért $AE=AD/2=(a+c)/2$. Ez a feltevés folytán egyenlő $b/\sqrt{2}$-vel, a b átfogó fölé írt egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójával. Így az ACE derékszögű háromszög egyenlő szárú, mert hasonló bármely egyenlő szárú derékszögű háromszöghöz, hiszen megegyeznek két oldal arányában ($AC:AE=\sqrt{2}$) és az ezek nagyobbikával szemben fekvő derékszögben. Eszerint $ACE\sphericalangle=45^\circ$, $ACD\sphericalangle=135^\circ$, ezekből $\gamma=ACB\sphericalangle=ACD\sphericalangle-BCD\sphericalangle=135^\circ-30^\circ=105^\circ$, másrészt $\alpha=15^\circ$, és így valóban $\gamma=\alpha+90^\circ$.

Bodosi Tamás (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

A továbbiakban $\beta=60^\circ$-ot ismertnek vesszük, másrészt az $\alpha=15^\circ$ érték megállapítása után a megoldást befejezettnek tekintjük.

III. megoldás: Az adatoknak megfelelő alakú háromszöghöz jutunk a következő úton. A $\beta=60^\circ$ és $b\sqrt{2}=a+c$ összefüggések azt a gondolatot adják, rajzoljuk meg a $DE=b$ szakasz egyik oldalára illeszkedő 60°-os látószögkörívet és az E-nél derékszögű DEF egyenlő szárú háromszöget, ebben ugyanis $DF=b\sqrt{2}$. Messe a körív a DF,EF oldalt G, ill. H-ban.



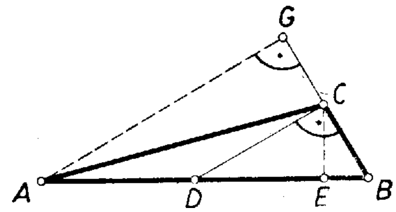
1. ábra

Ekkor DH az ívnek átmérője (az ív ugyanis nyilvánvalóan nagyobb félkörnél) így $DGH\sphericalangle=FGH\sphericalangle=90^\circ$, másrészt $DFE\sphericalangle=GFH\sphericalangle=45^\circ$, ezért az FGH háromszög egyenlő szárú: $GF=GH$. Továbbá $DHE\sphericalangle=60^\circ$, ezért $HDE\sphericalangle = 30°$, másrészt $GDE\sphericalangle = 45°$, és így $GDH\sphericalangle = 15°$. Ha most a H körül GH sugárral írt kör az ívet másodszor J-ben metszi, akkor a mondott háromszög alak DJE. Ebben ugyanis $HJ = HG$ folytán egyrészt $HDJ\sphericalangle = HDG\sphericalangle = 15°$, ezért $JDE\sphericalangle = HDE\sphericalangle - HDJ\sphericalangle = 30° - 15° = 15° = HDJ\sphericalangle$, és így $JE = JH = HG = GF$; másrészt a JDH és GDH derékszögű háromszögek egybevágók, ezért $JD = GD$. Ezek szerint a DJE háromszög J-ből kiinduló oldalaira $JD + JE = GD + GF = DF = DE\sqrt{2}$ és J-nél fekvő szöge $60°$, vagyis a DJE háromszögben feladatunk mindkét egyenlőségi feltevése teljesül.

E két feltevés a háromszög alakját (azaz szögeit, más szóval a háromszöget hasonlóság erejéig) egyértelműen meghatározza (ugyanis az oldalak közti összefüggés az $a/b + c/b = \sqrt{2}$ alakban az oldalak arányai közötti összefüggést ad). Ennélfogva minden, a feltevésnek megfelelő háromszögben a további szögek $EDJ\sphericalangle = 15°$-kal, ill. $DEJ\sphericalangle = 180° - (60° + 15°) = 105°$-kal egyenlők.

Frint Gábor (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

IV. megoldás: A bizonyítandó állítást $\gamma - 90° = \alpha$ alakban írva elég azt megmutatnunk, hogy a BC oldalra C-ben állított merőleges az AB oldalt olyan belső D pontban metszi, amellyel az ACD háromszög $ACD = \gamma - 90°$ és $CAD = \alpha$ szögei egyenlők. Ehhez pedig elegendő $AD = DC$ fennállását belátni.



Ha C vetülete AB-n E, akkor a BCE háromszögből $CE = a\sqrt{3}/2$, $BE = a/2$, és mivel $\beta < 90°$ folytán E az AB-n van, $AE = c - a/2$. Így az ACE derékszögű háromszögből Püthagorász tétele, valamint a feltevés alapján összefüggést kapunk a és c között:

$$b^2 = \left(\frac{a+c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

ebből

$$a^2 - 4ac + c^2 = 0,$$

és $c = 2a + a\sqrt{3}$ (a kisebb gyök nem felel meg a $c > a$ követelménynek): Másrészt a BCD derékszögű háromszögből $CD = a\sqrt{3}$ és $BD = 2BC = 2a$.

Most már látható, hogy D valóban az AB-n fekszik, ugyanis $BA > BD$, mert $c > 2a$, továbbá, hogy $AD = AB - BD = c - 2a = a\sqrt{3} = CD$, amit bizonyítani akartunk.

Kardeván Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A $c = 2a + a\sqrt{3}$ eredmény felhasználásával az $a = 15°$ eredményt így is igazolhatjuk. Ha A-nak BC-n levő vetülete G, akkor AC felezi a $BAG = 30°$-os szöget, mert a BG oldal C-vel való kettéosztásakor keletkezett részek $GC : BC$ aránya megegyezik GA és BA arányával. Az utóbbi, mint már láttuk, $\sqrt{3}/2$-vel egyenlő, másrészt $BG = c/2$ és a fenti $c = 2a + a\sqrt{3}$ alapján a másik arány értéke ugyanennyi:
$GC = BG - BC = c/2 - a = (c - 2a)/2 = a\sqrt{3}/2 = BC\sqrt{3}/2$.

Noszticzius Zoltán (Budapest, József A. g. IV. o. t.)