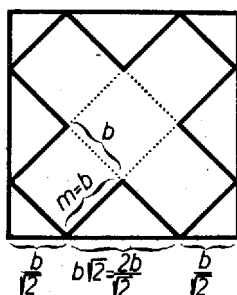
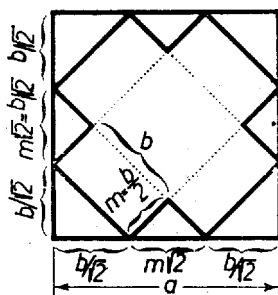


Legyen a papírlemez oldala a , a hasáb alapéle b , magassága m . A hálózat egy b oldalú négyzetből és négy b és m oldalakkal bíró téglalapról áll. Egy darabban leendő elkészítéséhez a lapokat 8-féleképpen rendezhetjük el. Tekintsük közülük a legegyszerűbb, legtetszetősebb típust, azt, amelyben mind a négy alapél hajtással és mind a négy oldalél ragasztással alakul ki (ennek ugyanis négyes forgási szimmetriája és négy szimmetriatengelye van), ezzel várható, hogy b és m legnagyobbra vehető. Ilyen hálózat úgy szerkeszthető, ha a négyzetlemezbe két olyan téglalapot írunk az átlókkal párhuzamos oldalakkal, melynek oldalai b és $b + 2m$, közös részük a b oldalú négyzet.



1. ábra

Kockát az $m = b$ esetben kapunk (1. ábra); ekkor a berajzolt téglalapok oldalai b és $3b$. A lemez egy oldalára való vetületeik összege egyenlő a lemez oldalával, tehát $4b/\sqrt{2} = a$ és így $b = a/2\sqrt{2}$. Ezért a hálózat szabadonálló csúcsai a lemez oldalainak első és harmadik negyed részében vannak; a térfogat: $V_k = b^3 = a^3\sqrt{2}/32 = a^3/16\sqrt{2}$.



2. ábra

Általában $b/\sqrt{2} + (2m + b)/\sqrt{2} = a$ (2. ábra), és innen $b + m = a/\sqrt{2}$ állandó, vagyis b növekedésével m csökken és viszont. A térfogat $V = b^2m$, amit olyan szorzattá alakíthatunk, amelyben a tényezők összege állandó:

$$V = b^2m = b \cdot b \cdot m = 4 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot m,$$

és $V/4$ tényezőire

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} + m = b + m = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Így a pozitív számok számtani és mértani közepe közötti ismert egyenlőtlenséget három szám esetén alkalmazva $V/4$ értéke akkora legnagyobb, ha tényezői egyenlők: $b/2 = m$, és így $b + m = 3m = a/\sqrt{2}$, $m = a/3\sqrt{2}$, $b = a\sqrt{2}/3$ és $V_{\max} = a^3\sqrt{2}/27 (> V_k)$. Az előálló test $m = b/2$ alapján nevezhető fél-kockának. A hálózat csúcsai a négyzetlemez csúcsaitól $b/\sqrt{2} = a/3$ távolságban vannak, a lemez oldalait $3 - 3$ egyenlő részre osztják.

Tomcsányi Gyula (Budapest, Toldy F. g. III. o. t)

Megjegyzések. 1. Nincs szükség a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség használatára annak az előre kimondott állításnak bizonyításához, hogy legnagyobb térfogat fél-kockával adódik. Válasszuk a hálózatnak a lemez oldalain levő csúcsait a lemez csúcsaitól $a/3$ helyett $a/3 - z$ távolságban. Ekkor $b = (a/3 - z)\sqrt{2}$, $m = a/\sqrt{2} - b = (a/6 + z)\sqrt{2}$, a megváltozott térfogat

$$V(z) = b^2m = 2\sqrt{2} \left(\frac{a}{3} - z\right)^2 \left(\frac{a}{6} + z\right) = \sqrt{2} \left(\frac{a^3}{27} - az^2 + 2z^3\right),$$

és ennek a fél-kocka $V_0 = a^3\sqrt{2}/27$ térfogatától való eltérése:

$$V(z) - V_0 = \sqrt{2}z^2(2z - a).$$

$V(z)$ akkor volna nagyobb V_0 -nál, ha ez a különbség pozitív volna, ami csak $z > a/2$ mellett következhetne be. Ez viszont ki van zárva, mert itt z , a lemez csúcsaihoz való közeledés, nem érheti el az $a/3$ értéket, s így a különbség nem lehet pozitív. – Vizsgálatunk azt a lehetőséget is magában foglalja, ha a hálózat csúcsait a lemez oldalán az oldal közepe felé toljuk el, ilyenkor z negatív, az eltérés is negatív, tehát V_0 nagyobb $V(z)$ -nél, ha csak z nem 0.

M. I.

2. Tíz dolgozat említi, vagy vázlatosan vizsgálja a hálózat lapjainak néhány vagy valamennyi más lehetséges egymás mellé helyezését. Szerzőik e többletért 1 – 1 jutalompontot kaptak. A többi dolgozatok 1 kivételével a bemutatott típusú hálózatot vizsgálták.

A fentihez hasonló számításokkal meg lehet mutatni, hogy a további 7 elrendezési lehetőség mindegyike esetén V_0 -nál kisebb az elérhető legnagyobb térfogat. – Ismert feladat viszont, hogy a hálózat hajtási és vágási vonalait a lemez oldalaival párhuzamosnak véve az elérhető legnagyobb térfogat $2a^3/27 = V_0\sqrt{2}$, ekkor a hasáb magassága negyedrésze az alapélnak.