I. megoldás: A három kérdés megválaszolásának előkészítéséül vizsgáljuk az

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} \tag{1}$$

kifejezésnek mint x függvényének értékét, a megjegyzésnek megfelelően minden négyzetgyökvonásban a gyök abszolút értékét véve.

A belső négyzetgyök értéke akkor valós szám, ha $2x-1\geqq 0$, $x\geqq 1/2$. Ilyen x-ekre mindkét (nagy) négyzetgyök valós számot ad, mert az első alatt két nem negatív szám összege áll, a másodikban pedig a kisebbítendő és a kivonandó négyzetének különbségét vizsgálva, ha $x\geqq 1/2$, akkor $x^2-(\sqrt{2x-1})^2=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqq 0$, és mivel az alapok pozitívok, így azokra

$$x\geqq\sqrt{2x-1}.$$

Az egyenlőségi jel $x=1$ esetére érvényes.

Mivel a két gyökjel alatti kifejezés egymásnak ún. konjugáltja, azért kifejezésünk négyzete egyszerűbbnek ígérkezik. Valóban, összevonás után

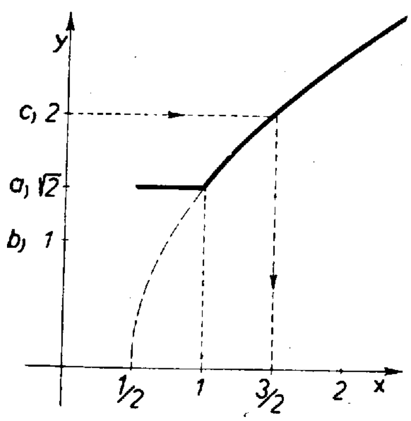
$$y^2=2x+2\sqrt{x^2-(2x-1)}=2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2x+2\mid x-1\mid .$$

Már most $x\leqq 1$ esetére $x-1$ negatív vagy 0, így $\mid x-1\mid=-(x-1)=1-x$, ezért $y^2=2x+2(1-x)=2$, ennélfogva $y=\sqrt{2}$, állandó.

$x>1$ esetére pedig $x-1$ pozitív, így $\mid x-1\mid=x-1$, tehát $y^2=2x+2(x-1)=4x-2$, ennélfogva $y=\sqrt{4x-2}$.

Ezek szerint az *a)* egyenlőség az $x\geqq 1/2$, $x\leqq 1$ értékekre, más szóval az $(1/2,1)$ zárt intervallumban teljesül, másutt nem; a *b)* egyenlőség sehol sem teljesül, ez olyan egyenlet, amelynek nincs gyöke, mert a $\sqrt{4x-2}$ kifejezés értéke az $x=1$ helyen $\sqrt{2}$, és x növekedtével növekszik, tehát $y\geqq\sqrt{2}$, ha $x\leqq 1/2$; végül a *c)* egyenlőség egyenlet, melynek gyöke $x=3/2$, az egyenlőség ezen egyetlen érték mellett érvényes.

Klimó János (Kaposvár, közg. t. IV. o. t.)



II. megoldás: A bal oldalak egyszerűbbé tételére alkalmazzuk a $\sqrt{2x-1}=z$ helyettesítést. A négyzetgyök értékére tett megállapodásunknak megfelelően csak z nem negatív értékeit kell figyelembe vennünk. Kifejezve x-et z-vel $x=(z^2+1)/2$, tehát (1) a helyettesítéssel így alakul:

$$y=\sqrt{\frac{z^2+1}{2}+z}+\sqrt{\frac{z^2+1}{2}-z}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{z^2+1+2z}+\sqrt{z^2+1-2z})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(z+1+\mid z-1\mid).$$

(A zárójel első tagjában az abszolút érték jelét mindjárt mellőzhettük, mert $z+1\geqq 1>0$.) Innen a fentiekhez hasonlóan

$$0\leqq z\leqq 1 \quad \text{esetére} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\big[z+1+(1-z)\big]=\sqrt{2},$$
$$z\leqq 1 \quad \text{esetére} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\big[z+1+(z-1)\big]=\sqrt{2}z,$$

(lásd a grafikont).

Ezek szerint az *a)* egyenlőség mindazon x-ekre teljesül, amelyeket a $0\leqq z\leqq 1$-et teljesítő z értékek adnak meg; ezekből $x=(z^2+1)/2$-re tekintettel $0\leqq z^2\leqq 1$, így $1\leqq z^2+1\leqq 2$ és $1/2\leqq x\leqq 1$;

a *b)* egyenlőség semmilyen z-re és így semmilyen x-re sem teljesül, mert $z\geqq 1$ mellett a bal oldal értéke: $y=\sqrt{2}z\geqq\sqrt{2}>1$;

a *c)* egyenlőség pedig $\sqrt{2}z=2$-ből $z=\sqrt{2}$-vel, és ennélfogva $x=(2+1)/2=3/2$ mellett teljesül.

Holop András (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Több a II. megoldáshoz hasonló dolgozat nem zárta ki a $z<0$ értékeket, ezért az

$$y=\frac{1}{2}(|\ z+1\ |+|\ z-1\ |)$$

alakból tetszetősebb grafikonhoz jutott, amely a fentin kívül az Y-tengelyre való tükörképét is tartalmazza, és így rajzzal a gimnáziumi IV. osztályos tankönyvből ismert módon magyarázza y-nak a középső intervallumbeli állandóságát.