I. megoldás: Három ismeretlen meghatározására két egyenletünk van, ez általában nem elegendő. Mégis egyértelművé teszi a megoldást az a követelmény, hogy a gyökrendszerben (a középiskolai ismereteknek megfelelően) csak valós számokat fogadhatunk el.

Az első egyenletből $x = y + 2$-t a másodikba helyettesítve, 0-ra redukálással és a teljes négyzet tagjait felismerve

$$y^2 + 2y + 1 + z^2 = (y + 1)^2 + z^2 = 0. \tag{1}$$

Két négyzet összege a valós számok körében csak úgy lehet 0, ha külön-külön is 0-val egyenlők, vagyis alapjuk is 0. Ebből $y = -1$, $z = 0$, továbbá $x = 1$. Az értékhármas az adott rendszert kielégíti.

Simai László (Kisújszállás, Móricz Zs. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A teljes négyzet felismerése nélkül úgy is célba jutunk, ha (1)-et y-ra vonatkozó egyenletnek tekintve egyelőre csak diszkriminánsát számítjuk ki: $D = -4z^2$. Ez csak akkor nem negatív, ha $z = 0$.

2. A rendszert így alakítva: $x + (-y) = 2$, $x(-y) = z^2 + 1$, könnyű meglátni, hogy x és $-y$ a $t^2 - 2t + (z^2 + 1) = 0$ másodfokú egyenlet két gyökével egyenlő. Ebből is a $z = 0$ megállapításból kiindulva adódik a fenti megoldás.

II. megoldás: A második egyenlet bal oldala a nem negatív z^2 elhagyásával csökken, vagy változatlan marad: $xy \leqq -1$. Ezért x és y ellentett jelűek. Éspedig x pozitív, y negatív, mert x nagyobb, hiszen az első egyenlet szerint a különbségük pozitív. Legyen y abszolút értéke y_1, azaz $-y = y_1$. Ekkor

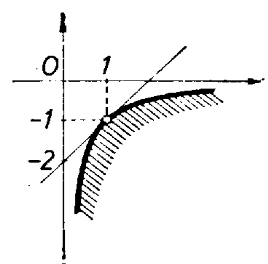
$$x + y_1 = 2, \qquad xy_1 \geqq 1,$$

vagyis a pozitív x és y_1 számok számtani közepe 1, így ennek négyzete is 1, másrészt mértani közepüknek négyzete legalább 1.

Ámde a két nem negatív szám számtani és a mértani közepére (ill. négyzetükre) ismert egyenlőtlenség szerint az utóbbi nem lehet nagyobb, így $xy_1 = 1$, ekkor pedig egyenlők: $x = y_l = -y = 1$, $y = -1$ és a második egyenletből $z = 0$.

Vámos Péter (Budapest, Than K. vegyip. t. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A II. megoldás $x > 0$, $y < 0$, $xy \leqq -1$, azaz $y \leqq -1/x$ követelményeinek a derékszögű koordinátarendszerben az $y = -1/x$ hiperbola negyedik negyedbeli ágán és annak „belsejében” fekvő pontok tesznek eleget (vagyis az ág bármely húrjának belső pontjai), az első egyenletnek pedig az $y = x - 2$ egyenesen fekvő pontok.



A szemlélet szerint az egyenes érinti a hiperbolát, egyetlen közös pontjuk: $(1; -1)$.

Sólyom István (Budapest, Vörösmarty M. g. III. o. t.)

2. Az előző megjegyzésbeli észrevétel természetesen nem tekinthető a feladat megoldásának, csupán a (számításos) megoldás szemléletes megfelelőjének.