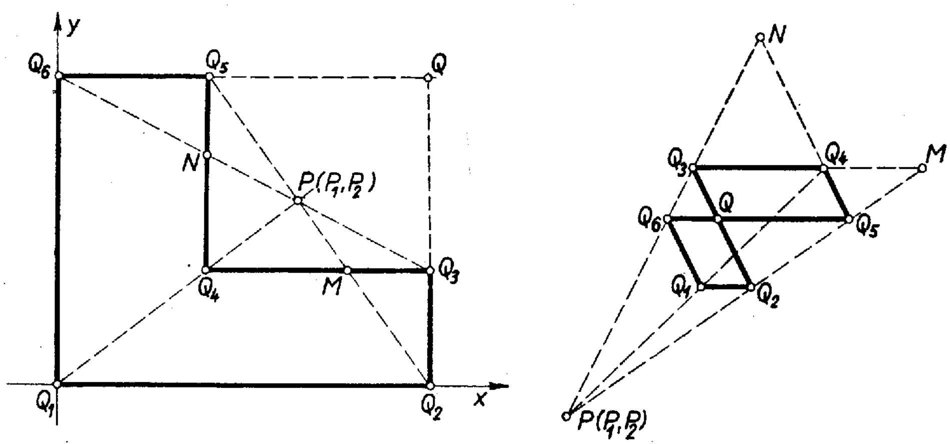
I. megoldás a feladat első részére: Nyilvánvaló, hogy a $Q_1Q_2\dots Q_6=H_1$ hatszög $3-3$ oldalegyenese egymással párhuzamos, és hogy mindegyik ilyen háromtagú csoportban a leghosszabb oldal egyenlő a másik kettő összegével. Világos továbbá, hogy H_1 alakja kétféle típusú lehet: „L alakú” (konkáv), amelyben a két irányú leghosszabb oldalak szomszédosak, és „szögletes nyolcas” alakú (hurkolt), amelyben ez a két oldal szemben fekvő (és mégis van közös pontja az oldal. szakaszoknak).



1. ábra

Messe egy konkáv H_1-nek Q_1Q_4 átlója Q_2Q_5-öt P_1-ben, Q_3Q_6-ot P_2-ben (1. ábra), ekkor azt kell megmutatnunk, hogy P_2 azonos P_1-gyel. Messe Q_2Q_5 a Q_3Q_4 oldalt M-ben, Q_3Q_6 a Q_4Q_5 oldalt N-ben, és a Q_2Q_3 oldal a szemben fekvő Q_5Q_6 oldalt Q-ban. Így az MQ_5Q_6 és Q_5Q_2Q, valamint NQ_3Q_4 és Q_3Q_6Q háromszögpárti hasonlóságából

$$Q_4M=\frac{Q_4Q_5\cdot QQ_5}{QQ_2}=\frac{Q_4Q_5\cdot Q_3Q_4}{Q_6Q_1},\qquad Q_4N=\frac{Q_3Q_4\cdot QQ_3}{QQ_6}=\frac{Q_3Q_4\cdot Q_4Q_5}{Q_1Q_2}.$$

Helyettesítsük ezeket az értékeket a P_1Q_4M és $P_1Q_1Q_2$, valamint P_2Q_4N és $P_2Q_1Q_6$ háromszögpárok hasonlóságából adódó

$$P_1Q_4:P_1Q_1=Q_4M:Q_1Q_2\qquad\text{és}\qquad P_2Q_4:P_2Q_1=Q_4N:Q_1Q_6$$

aránypárokba. Ekkor mindegyik arányra a

$$\frac{Q_4Q_3\cdot Q_4Q_5}{Q_1Q_6\cdot Q_1Q_2}$$

értéket kapjuk, és ez mutatja, hogy P_1 és P_2 a Q_1Q_2 egyenesnek ugyanaz a pontja.

Bizonyításunk betűről betűre érvényes hurkolt hatszögre is.

Kiss Ádám (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A háromszögek hasonlóságában H_1-ről csak azt használtuk fel, hogy minden második oldala párhuzamos, ezért az említett átlók akkor is egy pontban metszik egymást, ha csak az említett oldalak párhuzamossága áll fenn, a szomszédos oldalak merőlegessége nem (l. a hurkolt hatszög ábráját).

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás az első részre: A koordinátageometria „gépies” módszereivel ábrára való hivatkozás nélkül is bizonyíthatjuk az állítást, vagyis anélkül, hogy tekintettel lennénk H_1 alakjának típusára. Válasszuk kezdőpontnak Q_1-et, tengelyeknek a Q_1Q_2, Q_1Q_6 egyeneseket, legyenek továbbá Q_2,Q_3,Q_4,Q_5,Q_6 koordinátái rendre $(a,0)$, (a,c), (b,c), (b,d), $(0,d)$. Így a Q_2Q_5, ill. Q_3Q_6 átló egyenlete

$$y=\frac{d}{b-a}(x-a),\qquad y=d+\frac{c-d}{a}x,$$

így P metszéspontjuk koordinátái:

$$x=\frac{abc}{ac+bd-bc},\qquad y=\frac{acd}{ac+bd-bc}.$$

Innen $y/x=c/b$, ami éppen a Q_1Q_4 átló egyenlete; ez azt mutatja, hogy P-n ez az átló is átmegy.

Tihanyi Ambrus (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

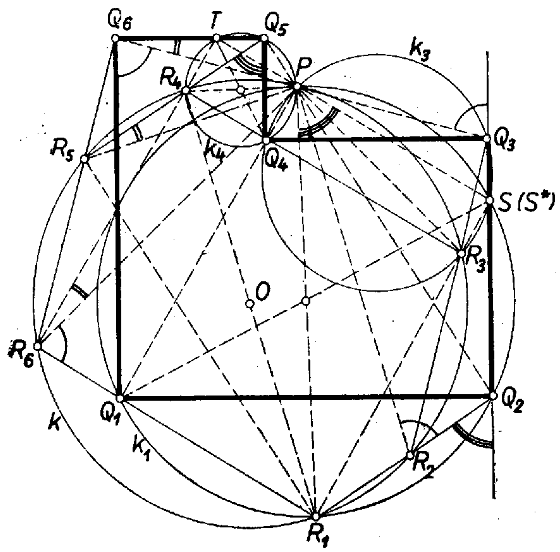
Megjegyzések. 1. Ez a módszer könnyűvé teszi a P pont létezésének diszkusszióját. P – mint Q_2Q_5 és Q_3Q_6 metszéspontja – akkor és csak akkor nem létezik, ha e két átló párhuzamos, iránytényezőik egyenlők, vagy ami ugyanaz, ha P kiszámított koordinátáinak közös nevezője 0. Az $ac+bd-bc=0$ feltevésből viszont $d=(b-a)c/d$, és ebből Q_2Q_5

iránytényezője: $d/(b-a) = c/b$, ami egyenlő Q_1Q_4 iránytényezőjével, ilyenkor tehát mindhárom átló párhuzamos (és ezért a feladat második részében mind hat q_i párhuzamos, az $R_1R_2 \dots R_6$ hatszög nem létezik).

2. Meg lehet mutatni, hogy ez az elfajulás csak hurkolt H_1-nél következhet be.

3. Az állítást *Fritz József, Holop András* és *Kolonits Ferenc* a Ceva-tétel felhasználásával bizonyította.

I. megoldás a feladat további részére: Megmutatjuk, hogy a P, R_6, R_1, R_2 pontnégyes húrnégyszöget és így egy k kört határoz meg (2. ábra, lásd a 990. feladat 2. ábráját is), mert R_6-nál levő belső és R_2-nél levő külső szöge egyenlő.



3. ábra

Ehhez felhasználjuk, hogy (1) $PQ_6R_6Q_1$ és (2) $PQ_2R_2Q_3$ a q-egyenesek szerkesztésénél fogva húrnégyszögek, hogy (3) H_1-nek Q_6Q_1 és Q_2Q_3 oldalai párhuzamosak és hogy (4) P a Q_3Q_6 egyenes pontja. Így (1) alapján $PR_6R_1\sphericalangle = \vartheta_1 = PR_6Q_1\sphericalangle = PQ_6Q_1\sphericalangle$, (3) és (4) alapján $\vartheta_1 = 180^\circ - PQ_3Q_2\sphericalangle$, végül (2) alapján $\vartheta_1 = PR_2Q_2\sphericalangle$, ami állításunkat igazolja. – Hasonlóan látható be, hogy az $R_1R_2 \dots R_6 = H_2$ hatszögnek bármelyik három egymás utáni csúcsa és P egy kör pontjai. Pl, P, R_1, R_2, R_3 és P, R_2, R_3, R_4 egy-egy körön van és így a P-n, R_2-n, R_3-on átmenő kör átmegy R_1-en és R_4-en is. Hasonlóan látható be, hogy mind a hat pont egy körön van, amely átmegy P-n is.

Ezekből következik, hogy H_2 bármélyik két szemközti csúcsa (amelyek indexeinek különbsége 3) a k egy átmérőjének két végpontja. Példaképpen R_2R_5-re mutatjuk meg, hogy látószöge R_1-ből derékszög.

Mivel P, R_5, R_6, R_1 a k-n vannak, és $PQ_6R_6Q_1$ húrnégyszög, így $PR_1R_5\sphericalangle = \vartheta_2 = PR_6R_5\sphericalangle = PR_6Q_6\sphericalangle = PQ_1Q_6\sphericalangle$, és ezért ϑ_1-nek (1) alapján kapott értékével $R_2R_1R_5\sphericalangle = R_2R_1P\sphericalangle + PR_1R_5\sphericalangle = \vartheta_1 + \vartheta_2 = PQ_1Q_2\sphericalangle = PQ_1Q_6\sphericalangle = Q_2Q_1Q_6\sphericalangle$, ami derékszög.

Most már látható, hogy H_1 és H_2 kapcsolata ugyanaz, mint a versenyfeladat $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ és $BCA'B'C'A$ hatszögeié, H_2-ből és P-ből a versenyfeladat szerkesztésével juthatunk el H_1-hez. Ennek felismerése feleslegessé teszi annak az állításnak a bizonyítását, hogy a feladat utolsó mondatában felsorolt szakaszok felezőpontjaival meghatározott k' körnek egy átmérője OP, mert ez már a versenyfeladatban megtörtént.

Czékus Laborc (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** E bizonyítás első része a Versenyfeladat III. megoldásának megfordítása, ott a „k-beli” húrnégyszögből (továbbá két „talpponti” húrnégyszögből) bizonyítottuk Q_6Q_1 és Q_2Q_3 párhuzamosságát, itt pedig a párhuzamosságból azt, hogy egy négyszög csúcsai k-n vannak.

2. Többen a $PR_6R_1R_2$ négyszög P és R_1 csúcsánál levő (ábránkon szemközti) szögek összegéről mutatták meg, hogy 180°-kal egyenlő. Ez valamivel nehézkesebb: $R_6PR_2\sphericalangle + R_6R_1R_2\sphericalangle = R_6PR_2 + Q_1R_1Q_2\sphericalangle = 180^\circ + R_6PR_2\sphericalangle - Q_1PQ_2\sphericalangle = 180^\circ + R_6PQ_1\sphericalangle - R_2PQ_2\sphericalangle = 180^\circ + (R_6Q_6Q_1\sphericalangle - R_2Q_3Q_2\sphericalangle) = 180^\circ$.

A következő megoldás más sorrendben bizonyítja az állítás egyes részeit.

II. megoldás a feladat további részére: Az R_1 pont szerkesztésénél fogva Q_1 és Q_2 a PR_1 átmérő fölötti k_1 Thalész-kör pontjai. Messe k_1 a Q_2Q_3 egyenest másodszor S-ben, ekkor Q_1S a k_1-nek átmérője, mert Q_2-ből derékszögben látható. Így a PSR_1Q_1 négyszög, amelynek csúcsait k_1 két átmérőjének végpontjai adják: téglalap, ezért PS merőleges PQ_1-re.– Hasonlóan a PR_3 átmérő fölötti, Q_3, Q_4-en átmenő k_3 Thalész-körnek Q_2Q_3-mal való második metszéspontját S^*-gal jelölve Q_4S^* a k_3-nak átmérője, ezért $PS^*R_3Q_4$ téglalap, és PS^* merőleges PQ_4-re. – Így pedig PS és PS^* azonosak, mert PQ_4 azonos PQ_1-gyel és PQ_1-re P-ben csak egy merőleges állítható. Ennélfogva S^* azonos S-sel, az említett két téglalapnak PS oldala közös. Ezért nem közös csúcsaik szintén egy téglalap csúcsait adják: $Q_1Q_4R_3R_1$ téglalap.

Ugyanígy bizonyítható, hogy a PR_4 és a PR_6 átmérő fölé írt k_4, k_6Thalész-körök a Q_5Q_6 egyenest ugyanazon T pontban metszik, ezért PTR_4Q_4 és PTR_6Q_1, és következésképpen $Q_1Q_4R_4R_6$ is téglalap. Minthogy ennek Q_1Q_4 oldala közös az előbb téglalapnak bizonyult $Q_1Q_4R_3R_1$ négyszöggel, azért $R_1R_3R_4R_6$ is téglalap, köréje k kör írható, ebben az R_1R_4 és R_3R_6 átlók átmérők.

Az R_1R_4 átmérő P-ből derékszögben látszik, mert egyrészt k_1-ben fellépő kerületi szögek és a $Q_2S\|Q_4Q_5$, $Q_2R_3\|Q_5R_4$ párhuzamosságok folytán $SPR_1\sphericalangle = 180^\circ - SQ_2R_1\sphericalangle = Q_4Q_5R_4\sphericalangle$, másrészt a téglalap szimmetriái és k_4-beli kerületi szögek révén $TPR_4\sphericalangle = PTQ_4\sphericalangle = PQ_5Q_4\sphericalangle$, harmadrészt mivel a PSR_3Q_4 és PTR_4Q_4 téglalapok PQ_4 oldala közös, tehát S, P, T egy egyenesen feküsznek, és így $R_1PR_4\sphericalangle = SPT\sphericalangle - SPR_1\sphericalangle - TPR_4\sphericalangle = 180^\circ - (Q_4Q_5R_4\sphericalangle + PQ_6Q_4\sphericalangle) = 180^\circ - PQ_5R_4\sphericalangle = 90^\circ$. (A második lépésben felhasználtuk, hogy a k_4 kör Q_5-öt nem tartalmazó PQ_4 és TR_4 íve egyenlő.)

Ugyanígy látható be, hogy a H_2 hatszög szemben fekvö R_4R_5 és R_1R_2 oldalai is téglalapot adnak, ennek körülírt köre is átmegy P-n és így azonos k-val, mert három pontjuk: R_1, R_4 és P közös. Eszerint k-nak R_2R_5 is átmérője, mert ez az utóbbi téglalapnak átlója.

Tusnády Gábor (Bp., Eötvös L. tud. egyet. term. tud. kari I. é. hallg.)

Megjegyzések. 1. Az állítás akkor is érvényes, ha a q_i egyenesek helyett azokat a q_i', egyeneseket használjuk fel az R_i' csúcsok előállításában, amelyek átmennek a Q_i pontokon és a megfelelő q_i-hez képest ugyanazon irányban ugyanakkora hegyes szöggel el vannak fordulva. (Ez a 990. feladat első állításának megfordítása.)

Grüner György (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

2. Valamennyi állítás bizonyítható koordinátageometriai úton is; ezt az utat választotta *Várady Gábor* (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)