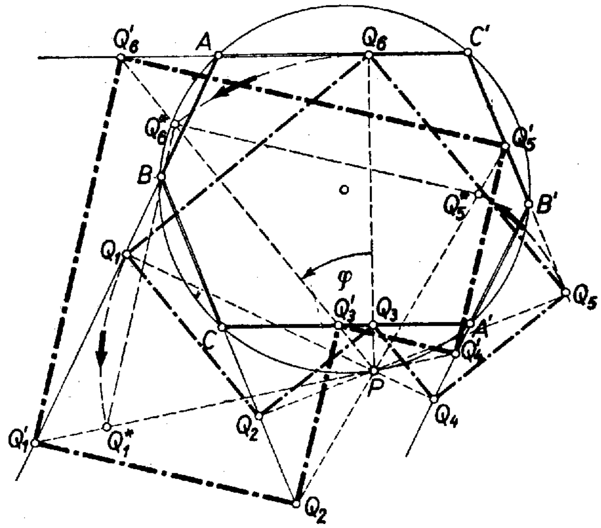
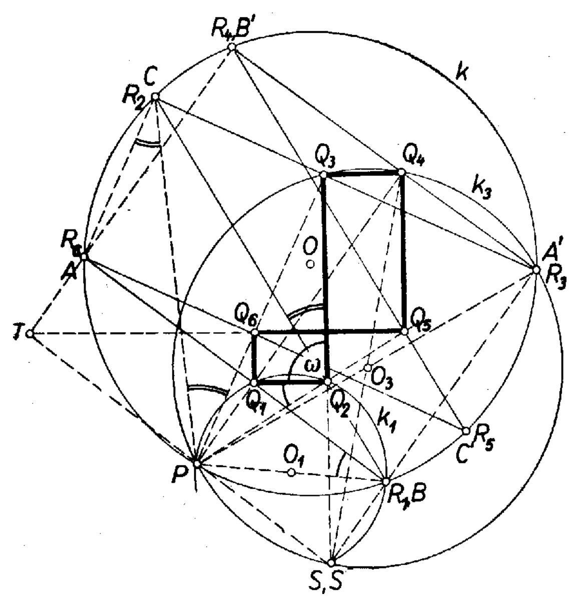
I. 1. Legyen az elforgatás szöge φ, és legyenek az új módon keletkezett hatszög csúcsai $Q_1', Q_2', \dots, Q_6'$.



1. ábra

Ekkor a $PQ_i'Q_i'$ háromszögek derékszögűek $(i = 1, 2, \dots, 6)$, bennük $Q_i'PQ_i\sphericalangle = \varphi$, ennélfogva $PQ_i' = PQ_i/\cos\varphi$, vagyis Q_i'-t Q_i-ből (a közvetlen szerkesztés helyett transzformációval, P középpontú, φ szögű, $1/\cos\varphi$ nyújtási arányszámú forgatva nyújtással is megkaphatjuk. Idomokra nézve a forgatva nyújtás hasonlósági transzformáció; mert a nyújtás ilyen, és az egy idomból puszta forgatással előálló, vele egybevágó idom is tekinthető az eredetihez hasonlónak, $1:1$ arányú nyújtással; ha pedig a J_1, J_2 és J_2, J_3 idompárok között hasonlóság áll fenn, akkor J_1, és J_3 is hasonlók. Ezért a $Q_1'Q_2'Q_3'Q_4'Q_5'Q_6' = H'$ hatszög hasonló a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = H$-hoz, tehát szögeik egyenlők, és így H'-nek is bármely két szomszédos oldala merőlegesen áll egymásra.

I. 2. A versenytétel bizonyításában nem használtuk fel az $ABCA'B'C'$ hatszög konvex voltát, ezért az ott adott bizonyítások hurkolt hatszög esetére is érvényesek; és csak aszerint mutatnak egymástól kis jelölésbeli eltéréseket, hogy a hurkolt hatszögnek mely oldalai metszik egymást, továbbá hogy P a körnek melyik ívén fekszik. Példaképpen megmutatjuk, hogy a 2. ábrán látható helyzet $\omega = Q_1Q_2Q_3$ szöge derékszög.

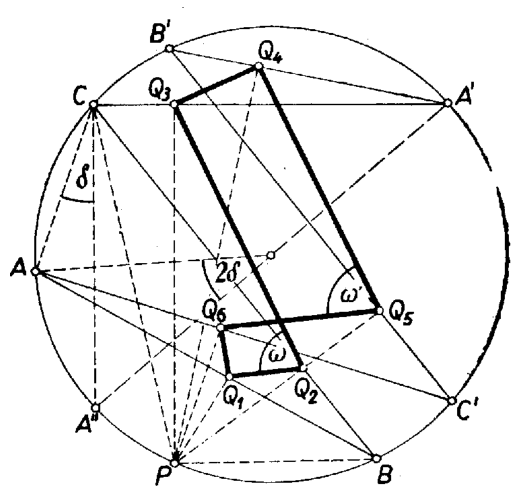


2. ábra

Ehhez elég belátni, hogy ω és a szerkesztéssel képezett PQ_2C derékszög közös Q_1Q_2C részét elhagyva, a PQ_2Q_1 és CQ_2Q_3 szögek egyenlők. A P, Q_2, Q_1 pontok és B (a Q_2, Q_1-et tartalmazó hatszögoldalak közös csúcsa) szerkesztésnél fogva egy húrnégyszög csúcsai, ezért $PQ_2Q_1\sphericalangle = PBQ_1\sphericalangle = PBA\sphericalangle$, és hasonlóan a PQ_2Q_3C húrnégyszögből $CQ_2Q_3\sphericalangle = CPQ_3\sphericalangle$ Az utóbbi szög egyenlő a PCA szöggel, mert váltószögek, ugyanis Thalész tétele folytán AC merőleges $A'C$-re és így párhuzamos PQ_3-mal. Végül a PBA és PCA szögek egyenlők, mert P az A, B, C pontokkal meghatározott körön fekszik. Ezzel a tervbe vett bizonyítást befejeztük.

II. E bizonyításban csak az AA' átlóról használtuk fel, hogy k-nak átmérője (B', C', nem szerepelt) és ezt használjuk ki a Q_5-nél fekvő szög esetében is. Hasonlóan a Q_3 és Q_6 csúcsnál fekvő szögek derékszög volta csak a BB' átlónak átmérő voltára támaszkodik, a Q_4 és Q_1-nél fekvőké pedig csak CC'-nek átmérő voltára.

Ha már most AA' nem átmérő, akkor ω nem derékszög; ezt az előbbi bizonyításhoz kapcsolódva bizonyítjuk (3. ábra).



3. ábra

Legyen az A'-n átmenő átmérő másik végpontja A''. Most CA nem merőleges CA'-re, hanem az erre merőlegesen álló CA''-vel akkora δ szöget zár be, mint az AOA'' szög fele, ahol O a k kör középpontja. Eszerint a PQ_2Q_1 és CQ_2Q_3 szögek eltérése is δ, és így ω a PQ_2C derékszögnél δ-val kisebb vagy nagyobb. Hasonlóan látható be, hogy az $\omega' = Q_4Q_5Q_6$ szög is δ-val tér el a derékszögtől. (Az ábrán $\omega' = \omega$; más helyzetben $\omega + \omega' = 180^\circ$ is lehetséges.) Konvex hatszögből kiindulva is hasonlóan halad a bizonyítás. Ezek szerint H-nak annyiszor két szöge tér el a derékszögtől, ahány átló az AA', BB', CC' közül nem átmérője a körnek. Ezzel a feladat állításait bebizonyítottuk.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Több dolgozat használta fel bizonyítás nélkül az ún. Simson-egyenesek tételét, holott azt a fentiekhez hasonlóan könnyen bebizonyíthatta volna. A tétel a következő: az ABC háromszög k körülírt körén felvett tetszés szerinti P pontból az AB, BC, CA oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen, az ABC háromszöghöz és a P ponthoz tartozó Simson-egyenesen feküsznek.

2. Két dolgozat szerint ha az eredeti hatszög hurkolt, akkor a Q-hatszög is ilyen. Ez nem szükségszerű.