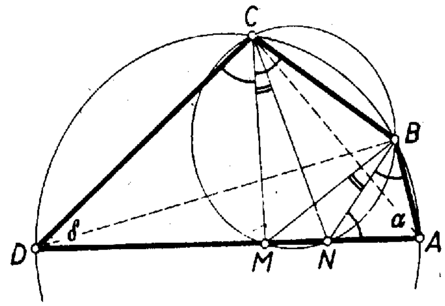
I. megoldás: Tegyük fel, hogy van a feladatban leírt tulajdonságú M pont és vegyük segítségül az AD oldalnak azt az N pontját, amelyre $AN=AB$; ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy $CD=DN$.



Legyen $BAD\sphericalangle=\alpha$ és $CDA\sphericalangle=\delta$, ekkor a húrnégyszög szögeire vonatkozó tétel alapján $BCD\sphericalangle=180^\circ-\alpha$ és $ABC\sphericalangle=180^\circ-\delta$. Az adott tulajdonságú M pont rajta van a négyszög B,C csúcsainál fekvő szögek felezőin, ezért $ABM\sphericalangle=(180^\circ-\delta)/2$ és $BCM\sphericalangle=(180^\circ-\alpha)/2$. Az utóbbi szög akkora, mint az ABN egyenlő szárú háromszög alapján fekvő ABN és ANB szögek, így a $BCMN$ idom húrnégyszög és N a BCM háromszög körülírt körének AD-vel való második közös pontja. Most már – feltéve, hogy N az AM szakaszon van –

$$NCD\sphericalangle=NCM\sphericalangle+MCD\sphericalangle=NBM\sphericalangle+BCM\sphericalangle=$$
$$=(ABM\sphericalangle-ABN\sphericalangle)+BCM\sphericalangle=ABM\sphericalangle=(180^\circ-\delta)/2,$$

vagyis az NCD háromszög egyenlő szárú, $CD=ND$, amit bizonyítani akartunk. – Ha N a DM szakasz pontja, akkor ismét

$$NCD\sphericalangle=MCD\sphericalangle-MCN\sphericalangle=BCM\sphericalangle-MBN\sphericalangle=$$
$$=BCM\sphericalangle-(ABN\sphericalangle-ABM\sphericalangle)=ABM\sphericalangle.$$

Végül ha N egybeesik M-mel, akkor $ABM\sphericalangle=ABN\sphericalangle=(180^\circ-\alpha)/2$, így $ABC\sphericalangle=2ABM\sphericalangle=180^\circ-\alpha$, vagyis BC párhuzamos AD -vel, az $ABCD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ezért az $M\equiv N$ pont a szimmetriatengelyen van, tehát felezi AD-t, és így $DN=AN=AB=CD$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Czékus Laborc (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** Az $AB+CD=AD$ feltétel elegendő is a kérdéses tulajdonságú M pont létezéséhez. Ha ugyanis egy kör AD húrjának egy pontja N és a kört az A körül AN, és D körül DN sugárral írt körök AD-nek ugyanazon oldalán B, ill. C-ben metszik, akkor van az AD húron olyan pont, amely az $ABCD$ négyszög AB,BC és CD oldalaitól egyenlő távolságra van. Ilyen a BCN háromszög köré írt körnek AD-vel való M második metszéspontja, (ill. ha e kör érinti AD-t, akkor maga N). Valóban, a fenti jelöléseket használva, és csupán arra az esetre szorítkozva, ha M a DN szakaszon adódik: $MBA\sphericalangle=180^\circ-\alpha-ABM\sphericalangle=DCB\sphericalangle-NMB\sphericalangle=DCB\sphericalangle-NCB\sphericalangle=DCN\sphericalangle=(180^\circ-\delta)/2=ABC\sphericalangle/2$, vagyis BM felezi az ABC szöget, M egyenlő távolságra van AB és BC-től. (Csak C és M szerkesztési módját használtuk fel, továbbá B-ről azt, hogy valahol a körnek az ADC szög szárai közötti AC ívén van.) Hasonlóan látható be, hogy CM felezi a DCB szöget és így M egyenlő távolságra van BC és CD-től; ebben használjuk fel B szerkesztési módját. Eszerint M mindhárom mondott oldaltól egyenlő távolságra van.

2. Sem az állítás, sem a megfordított tétel bizonyításában nem használtuk fel, hogy AD a körülírt körben átmérő, ezért minden olyan konvex húrnégyszögben, amelyben két szomszédos szög felezői egymást a csúcsaikat összekötő oldallal szemközti oldalon metszik, ez a szemben fekvő oldal egyenlő a vele szomszédos oldalak összegével. Az $ABCD$ idom konvexségét viszont felhasználtuk, vagyis hogy B és C az AD-nek ugyanazon partján vannak, ezen alapult a BCM háromszög körülírt körében az MN húr C és B-ből való látószögeinek egyenlősége.

Gazsi Lajos (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)
Tihanyi Ambrus (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

A további megoldások ábráin AD nem átmérőnek van rajzolva, de a szövegben nem térünk ki azon esetekre, ha α és δ között tompaszög is lép fel.

II. megoldás: Legyen M vetülete az AB,BC,CD oldalon rendre E, F, G, ekkor feltevésünk szerint $ME=MF=MG$, továbbá $BE=BF$ és $CF=CG$. Így az $MEBF$ és $MFCG$ négyszögek húrdeltoidok, EF és MB, ill. FG és MC átlóik merőlegesek, és bennük, az $ABCD$ idom húrnégyszög voltát is felhasználva, $EMF\sphericalangle=180^\circ-EBF\sphericalangle=180^\circ-ABC\sphericalangle=ADC\sphericalangle=\delta$ és hasonlóan $FMG\sphericalangle=\alpha$. Ezért ha még E és G vetülete MF-re H, ill. J, akkor az MGJ és AME, valamint MEH és DMG derékszögű háromszögek hasonlók és ugyanez áll a merőleges szárú $\delta/2$ ill. $\alpha/2$ hegyesszögeket tartalmazó MBF, EFM és MCF, GFJ derékszögű háromszög-párokra. Ezek alapján folytatólagos átalakítása,

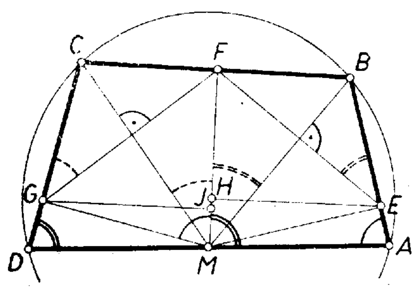
$$\frac{EB}{ME}=\frac{FB}{MF}=\frac{HF}{EH}=\frac{MF}{EH}-\frac{MH}{EH}=\frac{ME}{EH}-\frac{DG}{MG}=\frac{DM}{MG}-\frac{DG}{MG}=\frac{DM-DG}{ME},$$

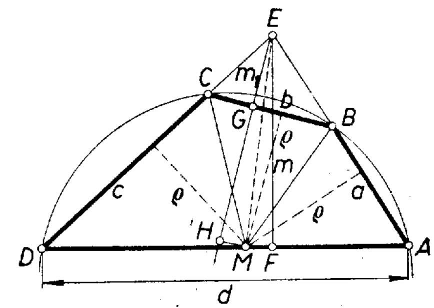
és így (az egyenlőség-sorozat szélső tagjait ME-vel szorozva) $EB = DM - DG$, másképpen $EB + GD = MD$. Hasonlóan kapjuk, hogy $AE + CG = AM$ (A és D-t, B és C-t páronként felcserélve E és G, valamint H és J is páronként felcserélődnek.) E két egyenlőség alapján pedig

$$AB + CD = (AE + EB) + (CG + GD) = (AE + CG) + (EB + GD) = \\ = AM + MD = AD,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Hahn János (Szeged, Déry M. gépip. t. IV. o. t.)





III. megoldás: Legyenek a négyszög oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, a kérdéses M pontnak a három oldaltól való távolsága ϱ, az AB és DC oldalegyenesek metszéspontja E, ennek vetülete AD és BC-re F, ill. G, és $EF = m$, $EG = m_1$. A feltevésnél fogva EM felezi az AED szöget. Így az $ABCD$ négyszög kétszeres területe kétféleképpen is kifejezhető:

$$2t = (a + b + c)\varrho = dm - bm_1,$$

és innen

$$AB + CD = a + c = \frac{dm - b(m_1 + \varrho)}{\varrho}.$$

Az ADE és CBE háromszögek hasonlók, mert a C és A, a B és D csúcspároknál fekvő szögeik a húrnégyszög alaptulajdonsága folytán egyenlők, így $b : d = m_1 : m$, $b = dm_1/m$, ennélfogva

$$a + c = \frac{dm^2 - dm_1(m_1 + \varrho)}{m\varrho}.$$

Ugyancsak a fenti indok alapján hasonlóak az AEF és CEG derékszögű háromszögek is, így EF és EG tükrös párok EM-re. Ha tehát az M-en át BC-vel húzott párhuzamos EG-t H-ban metszi, akkor $HG = \varrho$, továbbá az MEH és MEF derékszögű háromszögek egybevágóságából

$$EH = EG + GH = m_1 + \varrho = EF = m, \qquad \text{másképpen} \qquad m - m_1 = \varrho,$$

és ennek felhasználásával

$$a + c = \frac{dm^2 - dm_1 m}{m\varrho} = \frac{dm - dm_1}{\varrho} = \frac{d(m - m_1)}{\varrho} = d,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Rozváczy Judit (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A négyszög területének kifejezéséhez átmenetileg trigonometriai ismereteket is használva hasonlóan juthatunk célhoz. A kétszeres terület az AC átlóval való két részre osztásból kiindulva

$$2t = ab\sin(180^\circ - \delta) + cd\sin\delta = (ab + cd)\sin\delta = (ab + cd)\varrho/DM,$$

és innen $DM = (ab+cd)\varrho/2t$. Hasonlóan a BD átlóval való felbontásból $AM = (ad+bc)\varrho/2t$. Ezekkel $AM + DM = d$ alapján, valamint a fenti megoldás kiindulópontjának felhasználásával

$$2t/\varrho = (ab + cd + ad + bc)/d = a + b + c$$

és innen átrendezéssel $a + c = d$.

Muszbek László (Törökszentmiklós, Bercsényi M. g. IV. o. t.)

2. A megoldások többsége trigonometriai úton bizonyította az állítást. Ilyen volt a II. megoldás is, amely alapgondolatában a $\operatorname{tg} x/2 = (1 - \cos x)/\sin x$ azonosságot használta fel. Ajánljuk a megoldás ilyen átalakítását és az összehasonlítást. Utolsóként egy szögfüggvényeket felhasználó megoldást adunk, ebben egyszerűség végett támaszkodunk arra, hogy AD átmérő, és hogy $0^\circ < \alpha$, $\delta < 90^\circ$.

IV. megoldás: Feltevésünk úgy is kimondható, hogy a négyszögünk B és C csúcsánál fekvő szögek felezői AD-n metszik egymást. Ez a félkörbe írt négyszögek közül nyilván nem valamennyire teljesül (pl. az AD alapon álló elég kicsi és elég nagy magasságú egyenlő szárú trapézekben a metszéspont „közel van" az AD-re merőleges átmérő „alsó", ill. „felső" végpontjához), ezért avégett, hogy a szögfelezők AD-n messék egymást, B és C közül, más szóval α és δ közül legfeljebb az egyiket választhatjuk tetszés szerint. Keressünk tehát összefüggést α és δ között. Az ABD és ACD derékszögű háromszögekből $AB = AD\cos\alpha$, $CD = AD\cos\delta$, ezért a bizonyítandó egyenlőségből AD-vel való osztással ez várható: $\cos\alpha + \cos\delta = 1$.

Ezt abból bizonyítjuk, hogy $1/AM$-nek az AMB és AMC háromszögekből a szinusz-tétel alapján vett kifejezései egyenlők. Az ABM háromszögből $ABM\sphericalangle = 90^\circ - \delta/2$, így $AMB\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \delta/2) = 90^\circ - (\alpha - \delta/2)$; másrészt $ACB\sphericalangle = DCB\sphericalangle - DCA\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$, így $MCA\sphericalangle = MCB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = (180^\circ - \alpha)/2 - (90^\circ - \alpha) = \alpha/2$, tehát az ACM háromszögből $AMC\sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - \delta) - \alpha/2 = 90^\circ + (\delta - \alpha/2)$. Ezekkel

$$\frac{1}{AM} = \frac{\sin AMB\sphericalangle}{AB\sin ABM\sphericalangle} = \frac{\sin AMC\sphericalangle}{AC\sin ACM\sphericalangle},$$
$$\frac{\cos(\alpha - \delta/2)}{AD\cos\alpha\cos\delta/2} = \frac{\cos(\delta - \alpha/2)}{AD\sin\delta\sin\alpha/2}.$$

A számlálókat az addició tételek alapján felbontva és tagonkénti osztással, egyszerűsítéssel

$$1 + \frac{\sin\alpha\sin\delta/2}{\cos\alpha\cos\delta/2} = \frac{\cos\delta\cos\alpha/2}{\sin\delta\sin\alpha/2} + 1.$$

Átrendezéssel, a $\sin x = 2\sin x/2\cos x/2$, majd a $2\sin^2 x/2 = 1 - \cos x$ azonosságok alapján

$$4\sin^2\alpha/2\sin^2\delta/2 = \cos\alpha\cos\delta,$$
$$(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\delta) = \cos\alpha\cos\delta,$$
$$1 - \cos\alpha - \cos\delta = 0,$$

amit bizonyítani akartunk.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Számos dolgozat azért hiányos, mert szűk, a helyzetekbe mindenáron szimmetriát bevinni kívánó (többnyire öntudatlan) szemléletből kiindulva az $ABCD$ négyszög egyetlen lehetséges alakjaként a szabályos hatszög felét hajlandó elfogadni, vagy ami ugyanaz, M-et csak AD felezőpontjaként. Az I. megoldásból látható, hogy az AD húron bárhol felvett N pontból kiindulva $AB = AN$ és $DC = DN$-nel és B, C-t AD-nek ugyanazon partján véve a szóbanforgó tulajdonságú négyszöget kapunk.