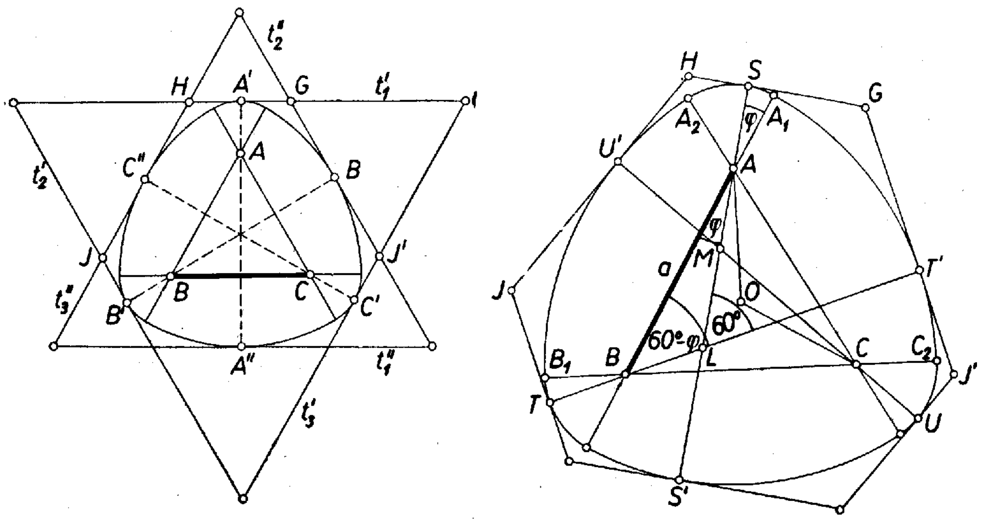
I. A körülforgatás lehetetlenségének belátásához elég megmutatni, hogy ha vesszük az REULEAUX-idomnak tetszés szerinti három egymáshoz képest páronként 120°-kal elfordult támaszsávját, ezek közös része általában nem egybevágó a kerettel, azaz nem szabályos hatszög. Ha mutatunk különböző oldalú közös részt adó támaszsáv-hármast, ebből látható, hogy a megfelelő állásban R bele sem illeszthető a keretbe.

Ilyen pl. az a három támaszsáv, amelynek mindegyike R-t az ennek határvonalát alkotó r, ill. $a+r$ sugarú ívszakaszok egy-egy szemben fekvő párjának felezőpontjában érinti. Legyen R határvonala A körüli r és C körüli $a+r$ sugarú ívének felezőpontja A', C'' és az ezekhez tartozó érintők metszéspontja H.



Ekkor az említett sávok közös része oldalainak hossza a nyilvánvaló szimmetria folytán váltakozva $2A'H$ és $2C''H$. Ezek egymástól különbözők. Ugyanis szimmetria folytán az AA', CC'' egyenesek átmennek az ABC háromszög O középpontján ezért az OHA' és OHC'' háromszögek derékszögűek, OH átfogójuk közös, viszont $A'O$ és $C''O$ befogóik különbözők, és ezért az $A'H$ és $C''H$ befogók is különbözők. Valóban,

$$A'O = A'A + AO = r + a/\sqrt{3},$$
$$C''O = C''C - CO = a + r - a/\sqrt{3} = r + (\sqrt{3}-1)a/\sqrt{3},$$

így $A'O > C''O$, és ezért (Püthagorász tétele alapján) $A'H < C''H$, amit bizonyítani akartunk.

II. Hasonlóan adódik, hogy nem lehet R-t szabályos háromszög alakú keretben a kívánt módon forgatni. Ha ugyanis a határvonal további ívszakaszainak felezőpontjai B', C', ill. A'', B'' akkor mind az A', B', C'-beli, mind az A'', B'', C''-beli érintők R számára egy-egy „támasz szabályos háromszöget” alkotnak és ezek oldalai különbözők,mert mindkettőnek középpontja O és beírt köreik sugaraira, mint láttuk, $OA' > OC''$.

Biborka Tamás (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldás I. részében követett meggondolásunk így is fogalmazható. Az R-idomnak három egymáshoz képest $120° - 120°$-nyi szöget bezáró szimmetriatengelye van. Ugyanilyen kölcsönös helyzetű keretünknek az a tengelyhármasa, amely az oldalak felező merőlegeseiből áll. Ha a forgatás lehetséges volna, akkor olyan helyzet is volna, amelyben a két tengelyhármas irányai páronként párhuzamosak. De ekkor egybe is kellene esniük, és ezért az R-idom középpontja a keret középpontjába esnék, a szemben fekvő támasztási pontpárokkal meghatározott szakaszok felezőpontjába. Ez pedig lehetetlen, mert az R-idom tengelyeinek az idomba eső szakaszát ($a > 0$ esetén) az O középpont nem felezi.

2. Meg lehet mutatni, hogy R-t csak abban az állásban lehet a keretbe beilleszteni, amelyben a kerettel az r és $a+r$ sugarú ívszakaszok csatlakozási pontjaiban érintkezik; és ebből az állásból R-t megindítani sem lehet. Mert ha egy támaszsáv támaszegyenesei R határvonalát egy-egy ívszakasz belső pontjában érintik, akkor ugyanez áll a 120°-kal elfordult irányú támaszegyenesekre is, és ekkor a három támaszsáv K közös része olyan hármas forgási szimmetriával bíró hatszög, amelynek szomszédos oldalai különbözők: 2. ábránkon az r sugarú A_1A_2 ív érintőjén levő GH oldala kisebb az $a+r$ sugarú C_2A_1 és B_1A_2 ív érintőjén fekvő $J'G = HJ$ oldalánál. Ugyanis ábránk további jelöléseivel, mint alább megmutatjuk, a közös LG, ill. MH átfogójú LGS és LGT', ill. MHS és MHU' derékszögű háromszögekben $LS \geqq LT'$, ill. $MS \geqq MU'$, így $GS \leqq GT'$, ill. $HS \leqq HU' = J'T'$, és ezért $GH = GS + SH \leqq GT' + T'J' = GJ'$. A K-idom szögei 120°-osak, szélessége mindhárom oldalpárra $a + 2r$, ebből már könnyű belátni, hogy GH kisebb, GJ' nagyobb a keret egy oldalánál, ha tehát a keretet úgy illesztjük K-ra, hogy egy szöge fedje a GHJ szöget, akkor K-nak G' és H' pontjai, velük $G'J$ és $H'J$ oldalai és ezekkel R-nek T és U pontjai egyaránt kiesnek a keretből.

Fenti egyenlőtlenségeink helyesek, mert ha $A_1AS\sphericalangle = \varphi$ (ahol $0° < \varphi \leqq 30°$), akkor az ABL háromszögből $LA = 2\alpha\sin(60°-\varphi)/\sqrt{3}$, $LB = 2\alpha\sin\varphi/\sqrt{3}$, ezekkel $LS - LT' = (LA+r)-(\alpha+r-LB) = LA+LB-a = 2\alpha\big[\sin(60°-\varphi)+\sin\varphi-\cos 30°\big]/\sqrt{3}$, és ez pozitív, mert a többtagú a $\sin(u+\nu)+\sin(u-\nu) = 2\sin u\cos\nu$ azonosság felhasználásával $\cos(30°-\varphi)-\cos 30°$ alakban írható, ahol $0° \leqq 30°-\varphi < 30°$, tehát valóban $LS > LT'$. Ebből pedig $MS = LT$, $MU' = LS'$ és $SS' = TT' = \alpha + 2r$ alapján $MS \geqq MU'$ amint fentebb állítottuk.

$\varphi = 0°$ esetén pedig $L \equiv B$, $M \equiv A$, $S \equiv A_1$, $U' \equiv A_2$, és egyszerűbb számítás igazolja első állításunkat. Ekkor R és a keret középpontjai egybeesnek.

3. A feladat első állítása így is kimondható: az R-idom nem burkolható egybevágó szabályos hatszögekkel (sőt nem egybevágó szabályos hatszögekkel sem).

4. *Bollobás Béla* (Budapest, Apáczai Csere J. g. III. o. t.) bebizonyította, hogy az R-idom nem forgatható körül olyan $a+2r$ szélességű sokszög alakú keretben, amelynek oldalai között van legalább három nem párhuzamos, de $a+2r$ szélességű rombuszban körülforgatható.

5. Több dolgozat az állítást arra rámutatva vélte bizonyítani, hogy az R-idom köré írható kör $OA' = r + a\sqrt{3}$ sugara nagyobb a keretbe írható kör $r + a/2$ sugaránál, és ezért R bele sem illeszthető a keretbe. Láttuk azonban, hogy beilleszthető. A megokolás még akkor sem volna elegendő, ha R magában foglalná a körülírt kör egy átmérőjét, mert ezt a keret szélességéhez képest ferdén esetleg még mindig beilleszthetnők.