Törzsszámhatványok szorzatára felbontva $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ezért a kívánt oszthatósághoz szükséges és elegendő, hogy $K$ osztható legyen $2^3, 3, 5$ és 7 mindegyikével. $K$-nak 2-ik, 3-ik és 4-ik tagja bármely természetes $n$-re páros, ezért $K$ akkor és csak akkor páros, ha $n^3$ páros. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $n$ páros: $n = 2k$. Páros $n$-re $K$ mindjárt $2^3$-nel is osztható, mert így $K = 8k^3 + 24k^2 - 8k - 24 = 8(k^3 + 3k^2 - k - 3)$.

Hasonlóan 3-mal akkor és csak akkor osztható $K$, ha 1-ső és 3-ik tagja együtt osztható 3-mal. Már most $n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = (n-2)n(n+2)$-t $n+2 = (n-1)+3$ alapján így is írhatjuk: $(n-2)(n-1)n + 3(n-2)n$, ez pedig $3A$ alakú (ahol $A$ egész szám), mert első tagja három egymás utáni egész szám szorzata, ami mindig osztható 3-mal, második tagjának pedig tényezője a 3. Így $K$ minden $n$ természetes számra – sőt minden $n$ egész számra – osztható 3-mal.

Könnyű felismerni, hogy $K$ fentebbi alakja szorzattá alakítható:

$$K = 8\left[k^2(k+3) - (k+3)\right] = 8(k+3)(k^2-1) = 8(k-1)(k+1)(k+3).$$

Így $K$ nyilván akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha ez a $k-1$, $k+1$, $k+3$ fényezők valamelyikére teljesül, tehát

$$\begin{array}{ll} \text{vagy } k-1 = 5m, \text{ azaz } k = & 5m+1, \\ \text{vagy } k+1 = 5j, \text{ azaz } k = 5j-1 = 5(j-1)+4 = & 5m+4, \\ \text{vagy } k+3 = 5j, \text{ azaz } k = 5j-3 = 5(j-1)+2 = & 5m+2, \end{array}$$

ahol $m$ természetes szám, vagy 0. És hasonlóan $K$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha

$$\text{vagy } k = 7s+1, \qquad \text{vagy } k = 7s+6, \qquad \text{vagy } k = 7s+4.$$

Más szóval akkor, ha $k$-t 5-tel osztva a maradék vagy 1, vagy 2, vagy 4, és $k$-t 7-tel osztva a maradék vagy 1, vagy 4, vagy 6.

Ezt a 3 –3 követelményt $3 \cdot 3 = 9$-féleképpen kapcsolhatjuk párba. Megmutatjuk példákon, hogy a két osztási maradék vizsgálatát eggyel helyettesíthetjük, a $k$ szám $5 \cdot 7 = 35$-tel való osztásának maradékát vizsgálva.

Ha pl $k$-t akár 5-tel, akár 7-tel osztva maradékul 1-et kell kapnunk, akkor a

$$k = 5m + 1 = 7s + 1$$

egyenletből $5m = 7s$, ami csak úgy lehetséges, ha $m$ osztható 7-tel: $m = 7t$, mert 5 és 7 relatív prímek; és így $k = 35t + 1$. Világos, hogy az ilyen $k$ számok 5-tel osztva is, 7-tel osztva is 1-et adnak maradékul.

Hasonlóan $k = 5m + 1 = 7s + 4$-ből

$$m = \frac{7s+3}{5} = s + \frac{2s+3}{5} = s + u$$

akkor és csak akkor egész, ha $2s + 3 = 5u$, vagyis

$$s = \frac{5u-3}{2} = 2u + \frac{u-3}{2} = 2u + \nu$$

egész, ez pedig teljesül, ha $u - 3 = 2\nu$, vagyis $u = 2\nu + 3$. Ebből $s = 2(2\nu+3) + \nu = 5\nu + 6$, ezért $m = (5\nu+6) + (2\nu+3) = 7\nu + 9$ és végül $k = 5(7\nu+9) + 1 = 35\nu + 46 = 35(\nu+1) + 11 = 35w + 11$; ennek maradékai 5-tel, ill. 7-tel osztva valóban $11 - 2 \cdot 10 = 1$, ill. $11 - 7 = 4$.

Valamivel rövidebben jutunk célhoz a $k = 5m + 2 = 7s + 6$ esetben. Innen $m = (7s+4)/5 = s + 2(s+2)/5 = s + 2z$ csak akkor egész, ha $s + 2 = 5z$, $s = 5z - 2$, $m = 7z - 2$, $k = 35z - 8 = 35(z-1) + 27$. (Ez azon múlt, hogy észrevettük a 2-es tényező kiemelhetőségét.)

Valamennyi maradék-párosítás eredményét táblázatban foglaljuk össze. A táblázat belsejében álló, $35t + u$ típusú alakok 5-tel osztva a sor elején álló, 7-tel osztva az oszlop fején álló alakra vezetnek.

| $k$ | $7s+1$ | $7s+6 = 7(s+1)-1$ | $7s+4$ |
|---|---|---|---|
| $5m+1$ | $35t+1$ | $35t+6$ | $35t+11$ |
| $5m+4 = 5(m+1)-1$ | $35t+29$ | $35t+34 = 35(t+1)-1$ | $35t+4$ |
| $5m+2$ | $35t+22$ | $35t+27$ | $35t+32$ |

Visszatérve $n$-re, célszerű ennek párossági követelményét is ezen eredményekhez kapcsolni. Az $n : 2$ osztásban csak a 0 maradékot engedtük meg, ezért az esetek száma nem emelkedik. Behelyettesítve a $k$-ra nyert kifejezéseket az $n = 2k$ összefüggésbe azt nyerjük, hogy $K$ akkor és csak akkor osztható 840-nel, ha $n$-et 70-nel osztva a maradék a táblázatban szereplő maradékok valamelyikének a kétszerese, tehát a következő kilenc szám valamelyike (növekvő sorrendbe rendezve): 2, 8, 12, 22, 44, 54, 58, 64, 68.

Pl, $n = 204 = 2 \cdot 70 + 64$-gyel $k = 102$, és így
$K = 8(k-1)(k+1)(k+3) = 8 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 105 = 840 \cdot 101 \cdot 103$.

*Mészáros Kornélia* (Budapest, Veres Pálné lg. IV. o. t.)

*Megjegyzés.* A két osztás helyett egyre való áttérés azon a sejtésen alapul, hogy a $k : 5$ és $k : 7$ osztások $r'$ ill. $r''$ maradékai egyértelműen meghatározzák a $k : 35$ osztás maradékát, más szóval, ha a különböző $k_1$ és $k_2$ számok mindegyikének 5-ös, ill. 7-es maradéka $r'$, ill. $r''$, akkor a $k_1 : 35$ és $k_2 : 35$ osztások egymástól csak a hányadosban különböznek. Valóban, feltevéseink szerint

$$k_1 = 5m_1 + r' = 7s_1 + r''$$
$$k_2 = 5m_2 + r' = 7s_2 + r'',$$

innen

$$k_2 - k_1 = 5(m_2 - m_1) = 7(s_2 - s_1),$$

ez csak úgy állhat, ha $m_2 - m_1 = 7t$, ebből pedig $k_2 - k_1 = 35t$, ami a sejtést igazolja.