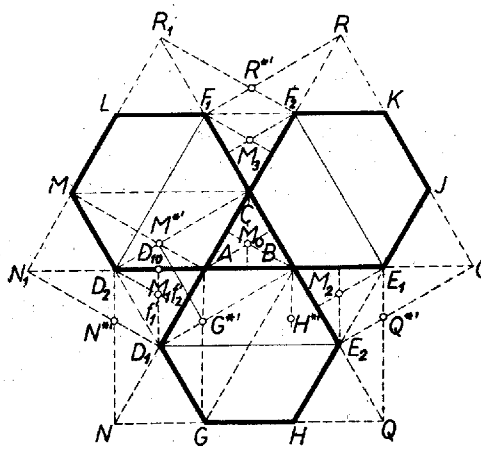
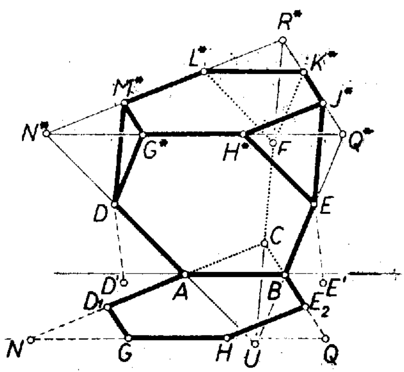
A felhajtás, más szóval (legfeljebb 180°-nyi) forgatás közben a hatszög-lapoknak bármely, nem a forgatási élbe, a t tengelybe eső P pontja olyan félkört ír le, melynek síkja merőleges a tengelyre és középpontja P forgatás előtti helyzetének a t-n levő P_0 vetülete. Minden ilyen félkörnek az ABC háromszög (helyben maradó) S síkjára való vetülete a t-re merőleges $2PP_0$ hosszúságú szakasz, felezőpontja P_0. – A szabályos háromszög és a szabályos hatszög egy-egy szögének összege 180°, ezért a hatszögek D_2, E_1; E_2, F_1; F_2, D_1 csúcsai (a felhajtások előtt) az AB, BC, CA tengelyek meghosszabbításainak pontjai, továbbá az oldalak egyenlősége folytán az $AD_2D_1 = H_1$, $BE_2E_1 = H_2$, $CF_2F_1 = H_3$ háromszögek a oldalú szabályos háromszögek, és így G, D_1, D_2, M is egy egyenes pontjai.

Ezek szerint a D_1 csúcs által leírt f_1 félkör vetülete a H_1-nek D_1-ből húzott magasságvonalára esik, és hasonlóan D_2 pályájának, f_2-nek vetülete a D_2-ből húzott magasságvonalra. Ezek egyetlen közös pontja H_1-nek M_1 magasságpontja, és ez az említett szakaszoknak is pontja. Ennélfogva f_1 és f_2-nek a feladatban szereplő D egybeesési pontja egyértelműen létezik, vetülete M_1.

A hatszöglapok D_1E_2, D_2F_1, átlói a forgatás minden helyzetében párhuzamosak az AB, ill. AC tengellyel (ezért S-sel is), és ugyanez áll S-en levő vetületükre. Ebből ábránk szimmetriaviszonyainak figyelembevételével nyilvánvaló, hogy amikor D_1 és D_2 a D-ben egybeesnek, akkor E_2, ill. F_1 vetülete H_2-nek M_2, ill. H_3-nak M_3 magasságpontjába esik. Ugyanezért a második hatszög forgatása közben E_1 egybeesik az első és harmadik hatszög rögzítése folytán rögzített E_2-vel, és ekkor F_2 is egybeesik a rögzített F_1-gyel. Ezzel az állítás első részét bebizonyítottuk. A $DEF = S_1$ sík, párhuzamos S-sel, mert egymást metsző DE, DF egyenesei párhuzamosak S-sel.

A GH él az első hatszöglap bármely helyzetében párhuzamos S-sel, és – mint a forgatás előtt is – kétszer akkora távolságra van AB-től, mint D_1E_2. Ezért G és H a lap rögzítésével abba az S-sel párhuzamos S_2 síkba jut, amely kétszer akkora távolságban van S-től, mint S_1, S-nek ugyanazon oldalán, mint S_1. Ugyanez áll a felhajlított J, K, L, M-re. Ezzel a kívánt bizonyítást befejeztük; ki kell még számítanunk a keletkezett P konvex test térfogatát.





Legyenek a lapok szabadon álló csúcsai a felhajlítás után G^*, H^*, $\ldots$, M^*. Ekkor P-t „felülről" nyilván a $G^*H^* \ldots M^*$ hatszög határolja, és további lapjai a DG^*M^*, EH^*J^*, FK^*L^* háromszögek. Az AD_2D_1, és BD_2G háromszögek hasonlósága folytán G^*-nak $G^{*\prime}$ vetülete a BD_2G háromszög magasságpontjába esik, és ugyanígy M^*-nak $M^{*\prime}$ vetülete a CMD_1 háromszög magasságpontjába. Így G^*M^* párhuzamos és egyenlő $G^{*\prime}M^{*\prime}$-vel, ez pedig $BC(= a)$-val, mert az utóbbi két $2a$ oldalú szabályos háromszög egybevágó és D_1D_2 oldalszakaszuk közös, így a $G^{*\prime}M^{*\prime}CB$ négyszög paralelogramma, – továbbá $H^*G^*M^*\sphericalangle = E_1BC\sphericalangle = 120°$. Ezek szerint $G^*H^* \ldots M^*$ ugyancsak a-oldalú szabályos hatszög, P további három lapja pedig a oldalú szabályos háromszög, vagyis P-t négy a oldalú szabályos hatszög és négy a oldalú szabályos háromszög határolja, minden csúcsában két hatszög és egy háromszög síkja metszi egymást.

Ebből nyilvánvaló, hogy ha az első hatszög GH oldalának AD_1, BE_2-vel való metszéspontját N, Q-val jelöljük, e lap helyett a $3a$ oldalú NQC háromszöget forgatjuk míg D_1 a D-be jut, és ezen lépéseink megfelelőit a másik két hatszöglapban is elvégezzük (QRA és RNB), akkor e három lap egy felül nyitott, $3a$ élű $N^*Q^*R^*U = T$ szabályos tetraédert határoz meg. A $G^*H^* \ldots M^*$-ből hasonlóan keletkező $N^*Q^*R^*$ háromszög lezárja T-t. (C az AB tengelynek a hatszöggel ellentétes partján fekszik, így a CAB kiegészítő háromszög S alá fordul, az elforduló C, A, B csúcsok S alatt esnek egybe U-ban, ennek S-en való vetülete az ABC háromszög M_0 magasságpontja.

T éleit P csúcsai 3–3 egyenlő részre osztják, ezért T-ből P-t négy egybevágó, a élű szabályos tetraéder lemetszésével kapjuk (egyikük $N^*G^*M^*D$). Minthogy a b élű szabályos tetraéder térfogata $b^3\sqrt{2}/12$, azért P térfogata

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\left[(3a)^3 - 4a^3\right] = \frac{23\sqrt{2}a^3}{12}.$$

P-nek mind a 12 csúcsa egyenértékű, minden csúcsban 3 lap: 2 hatszög és 1 háromszöglap fut össze. Eszerint bármelyik csúcsból 3 él indul ki és $2 \cdot 3$ lapbeli átló az ide befutó hatszögekben. Így a csúcsból a további 11 csúcs közül 9-hez nem testátló vezet, tehát csúcsonként 2 testátló indul ki, pl. A-ból J^* és K^*-ba. Eszerint a testátlók összes száma 12, mert a kiindulások száma $12 \cdot 2$, de minden átlón két kiindulási pont van.

S. Nagy Erzsébet (Makó, József A. g. IV. o. t)

Megjegyzés. Hogy $G^*M^* = a$, azt így is beláthatjuk: a hatszöglapok ϑ elfordulási szögére $\cos\vartheta = D_{10}M_1/D_{10}D_1 = 1/3$, így $AG^{*\prime} = AG/3$, $AM^{*\prime} = AM/3$, ezért az A-nál közös szögű $AG^{*\prime}M^{*\prime}$ és AGM háromszögek hasonlók: $G^{*\prime}M^{*\prime} = GM/3 = a$.

Parti Enikő (Budapest, Bagi Ilona lg. III. o. t.)