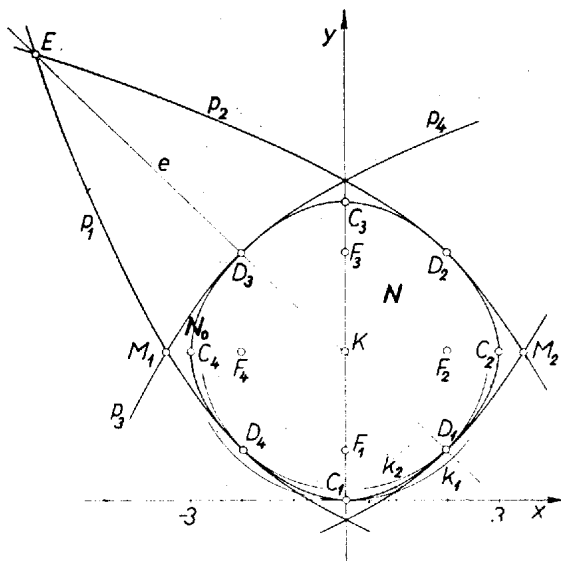


Az \mathbf{N} alakzat létezik, mert a p_1 parabola C_1 csúcsa az origó, tengelye az Y -tengely, paramétere 2 egység, fókusza $F_1(0; 1)$ így az adott K pont a p_1 belsejében van – nem magán a parabolán – ezért K a p_2, p_3, p_4 -nek is a belsejében van és ugyanez áll egy a K körül elég kicsi sugárral írt kör minden pontjára, tehát a négy parabola belsejének van közös része.

Ha \mathbf{N} -nek egy a p_1 -ből való kerületi pontjában a támaszegyenes t_1 , akkor az ebből a K körüli forgatásokkal előáll t_2, t_3, t_4 egyenes ugyancsak támaszegyenes, másrészt ezek egy négyzetet zárnak körül, tehát \mathbf{N} négyzetekkel burkolható.

A legnagyobb és a legkisebb támasznégyszet meghatározása céljára le kell írunk \mathbf{N} -et. p_2, p_3, p_4 csúcsa rendre a $C_2(3; 3), C_3(0; 6), C_4(-3; 3)$ pont, fókuszaik $F_2(2; 3), F_3(0; 5), F_4(-2; 3)$, egyenleteik: $(y-3)^2+4(x-3)=0, x^2+4(y-6)=0, (y-3)^2-4(x+3)=0$. p_1 és p_3 egymást az $M_1(-\sqrt{12}; 3)$ és $M_2(\sqrt{12}; 3)$ pontokban metszik, belsejük közös része a (lencse alakú) $\mathbf{N}_0 = M_1C_1M_2C_2M_1$ görbevonalú idom, \mathbf{N} -et csak ebben kereshetjük. C_2 és C_4 az M_1M_2 szakaszon vannak, tehát \mathbf{N}_0 -ban, eszerint \mathbf{N} úgy keletkezik \mathbf{N}_0 -ból, hogy p_2 és p_4 -nek C_2 -t, C_4 -et tartalmazó bizonyos ívei \mathbf{N}_0 -nak bizonyos részeit levágják. Szimmetria okokból, minthogy K rajta van p_1 és így mindnégy parabola tengelyén, elég lesz meghatározni p_2 közös pontját p_1 -nek $M_1C_1M_2$ ívével, amelyen fekvő pontok abszcisszáira $-\sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12}$.

E célra alább megmutatjuk, hogy p_2 a p_1 -nek tükörképe a K -n átmenő, az Y -tengellyel $+45^\circ$ -ot bezáró e egyenesre, melynek egyenlete: $y = -x + 3$. Így p_1 -nek és e -nek könnyen kiszámítható $D_1(2; 1)$ és $E(-6; 9)$ metszéspontjai p_2 is rajta vannak. Más közös pontja nincs is p_1 és p_2 -nek, mert az egyenletükből összekapcsolt egyenletrendszer y kiküszöbölésével az $x^4 - 24x^2 + 64x - 48 = 0$ egyenletre vezet, és ennek nincs más gyöke, mint D_1 és E abszcisszája (az előbbi háromszoros gyök). – E nincs rajta az $M_1C_1M_2$ íven, D_1 viszont rajta van, ennél fogva p_2 -nek az az íve, amely \mathbf{N}_0 -nak \mathbf{N} -be nem tartozó részét levágja, D_1 -ből indul ki. Végpontja pedig p_2 és p_3 -nak a D_1 -ből a K körüli 90° -os forgatással is előálló közös pontja: $D_2(2; 5)$, mert p_3 a p_2 körül is előáll, ha azt K körül 90° -kal elforgatjuk. Hasonlóan p_4 a p_2 -ből K körüli 180° -os forgatással is előáll, ezért p_4 fent említett ívének végpontjai a $D_3(-2; 5)$ és $D_4(-2; 1)$ pontok.



p_2 valóban tükörképe p_1 -nek e -re, mert a p_2 -t előállító 90° -os forgatást helyettesíthetjük két a K -n átmenő, egymással 45° szöget bezáró tengelyen alkalmas sorrendben való tükrözéssel.¹ Első tengelynek az Y -tengelyt véve, – mert ez p_1 -et önmagába viszi át – a második tengely e lesz, – amint állítottuk. – Mindezek szerint \mathbf{N} -nek nemcsak forgási, hanem tengelyes szimmetriái is vannak, tengelyei a páronként egybeeső parabolatengelyek és szögfelezők: e és a K -n át e -re merőleges egyenes. – p_1 -nek D_1 , belüli d_1 érintője p_2 -t is érinti ugyanitt, mert egyenlete $2(y+1) - 2x = 0$, azaz $y = x - 1$, iránytényezője $m = 1$, és így merőleges e -re, a tükrözéssel önmagába megy át. Eszerint \mathbf{N} -nek D_1 -ben nincs csúcsa, támaszegyenes e egyértelműen d_1 , továbbá az ebből forgatással előálló d_2, d_3, d_4 -et leszámítva minden támaszegyenes érintője a megfelelő parabolaívnek.

Alább megmutatjuk, hogy \mathbf{N} köré és bele K -val mint középponttal kör írható, vagyis van olyan k_1 ill. k_2 kör, amelynek vannak közös pontjai \mathbf{N} határvonalával, és k_1 , magába foglalja \mathbf{N} -et, \mathbf{N} magába foglalja k_2 -t. k_1 a parabolák C csúcsain megy át, k_2 pedig az ívek D csatlakozási pontjain, tehát sugaruk 3, ill. $2\sqrt{2}$ egység, így k_1, k_2 minden támasznégyszetének oldala 6, ill. $4\sqrt{2}$ egység. \mathbf{N} -nek nem lehet nagyobb támasznégyszete, mint k_1 -nek, mert k_1 minden támasznégyszete magába foglalja \mathbf{N} -t; 6 egységnyi oldalú támasznégyszete viszont van: az, amelyben a fenti t_1 , az X -tengely, tehát \mathbf{N} legnagyobb támasznégyszetének oldala 6 egységnyi. És \mathbf{N} -nek nem lehet kisebb támasznégyszete, mint k_2 -nek, mert minden támasznégyszete magába foglalja k_2 -t, $4\sqrt{2}$ oldalú támasznégyszete pedig van: az, amelyben t_1 azonos d_1 -gyel, tehát \mathbf{N} legkisebb támasznégyszetének oldala $4\sqrt{2}$ egységnyi.

Valóban, a p_1 parabola D_4D_1 ívének minden (x_0, y_0) , azaz $(x_0, x_0^2/4)$ pontja, amelyre tehát

$$-2 \leq x_0 \leq 2,$$

¹Lásd pl: KML. XVII. kötet 78. o. (1958 november).

k_1 és k_2 között, vagy egyikükön van, – és ezért ugyanez áll \mathbf{N} határvonalának D_1D_2 , D_2D_3 , D_3D_4 íveire. Ugyanis k_1, k_2 egyenlete $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, ill. $x^2 + (y - 3)^2 = 8$, így alsó félkörívük x_0 abszcisszájú pontjának ordinátája

$$y_1 = 3 - \sqrt{9 - x_0^2}, \quad \text{ill.} \quad y_2 = 3 - \sqrt{8 - x_0^2},$$

így azt kell belátnunk, hogy ezekkel teljesül $y_1 \leq y_0 \leq y_2$, azaz

$$3 - \sqrt{9 - x_0^2} \leq \frac{x_0^2}{4} \leq 3 - \sqrt{8 - x_0^2}.$$

Evégett megkeressük, hogy ez a kettős egyenlőtlenség $-\sqrt{8} \leq x_0 \leq \sqrt{8}$ értelmezési tartományának mely x_0 számaira teljesül. Az átrendezéssel adódó

$$3 - \frac{x_0^2}{4} \leq \sqrt{9 - x_0^2}, \quad \sqrt{8 - x_0^2} \leq 3 - \frac{x_0^2}{4}$$

egyenlőtlenségekben a kisebb oldal sem negatív, ezért négyzetükre ugyanazon irányú egyenlőtlenség áll:

$$-\frac{3x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{16} \leq -x_0^2, \quad -x_0^2 \leq 1 - \frac{3x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{16},$$

azaz

$$0 \leq \frac{x_0^2}{2} \left(1 - \frac{x_0^2}{8}\right), \quad 0 \leq 1 - \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{16} = \left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right)^2,$$

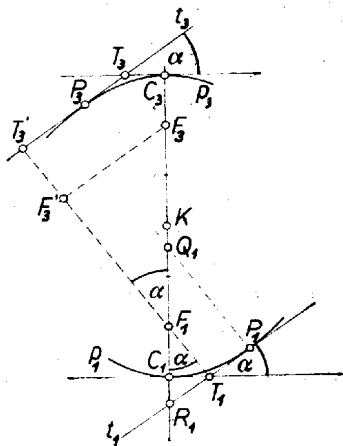
ez pedig akkor teljesül, ha

$$x_0^2 \leq 8, \quad -2\sqrt{2} \leq x_0 \leq 2\sqrt{2}, \quad \text{ill.} \quad x_0^2 \leq 4, \quad -2 \leq x_0 \leq 2,$$

vagyis a D_4D_1 ív minden pontjára. Egyenlőség csak az $x_0 = 0$, ill. az $x_0 = \pm 2$ abszcisszákkal mellett teljesül, vagyis C_1 -re, ill. D_4 , D_1 -re. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Kolonits Ferenc (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. \mathbf{N} támaszsávjai közül a legszélesebbet, legkeskenyebbet függvényvizsgálattal is kiválaszthatjuk. Legyen t_1 és t_3 irányszöge α , erre $-45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, metszésük p_1 , ill. p_3 csúcsérintőjével T_1, T_3 .



A parabola érintőjének ismert tulajdonsága folytán F_1T_1 merőleges t_1 -re, így a t_1, t_3 sáv z szélességét megadja T_1T_3' ahol T_3' a T_3 vetülete F_1T_1 -re. Legyen még F_3 vetülete F_1T_1 -re F_3' , ekkor

$$\begin{aligned} z &= T_1T_3' = T_1F_1 + F_1F_3' + F_3'T_3' = \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + 4 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} + 4 \cos \alpha, \end{aligned}$$

mert $F_1F_3 = 4$ egység. z tagjai pozitívak, szorzatuk állandó, így összegük akkor a legkisebb, ha egyenlők: $\cos^2 \alpha = 1/2$, $\alpha = \pm 45^\circ$, ebből $z_{\min} = 4\sqrt{2}$.

Másrészt $z_{\max} = 6$, mert $\alpha = 0^\circ$ -nál éppen $z = 6$, viszont a

$$z - 6 = \frac{1}{\cos \alpha} (4 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 2) = \frac{1}{\cos \alpha} \left[\left(2 \cos \alpha - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right]$$

különbség $\cos \alpha > 0$ mellett mindaddig negatív vagy 0, amíg

$$-\frac{1}{2} \leq 2 \cos \alpha - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq 2 \cos \alpha \leq 2, \quad -60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ,$$

vagyis α minden vizsgált értékére.

Arató Péter (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

2. Több dolgozat $2KP_1$ -et vette a támasznégyszet oldalának, ahol P_1 a t_1 érintési pontja. KP_1 csak akkor merőleges t_1 -re, amikor P_1 a C_1 -ben vagy D_1 -ben van, különben a t_1 -re P_1 -ben emelt merőleges egy az F_1 és K közötti Q_1 pontban metszi az Y -tengelyt, mert – mint a parabola említett tulajdonságából következik –, Q_1 annak az R_1 pontnak F_1 -re való tükörképe, ahol t_1 az Y -t metszi, erre C_1R_1 a P_1 ordinátájának (-1) -szerese, ez pedig D_1 -et kivéve kisebb 1-nél.