I. megoldás: Hogy a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló szögeknek legyen értelmük, O és M nem eshetnek egybe. Ez csak szabályos háromszögben következnék be, emiatt a szabályos háromszöget kizárjuk. A koszinuszokat az $AOM, BOM; COM$ háromszögekből a koszinusz tétellel kifejezve azok K összege így írható:

$$K = \frac{(OM^2 + r^2 - MA^2) + (OM^2 + r^2 - MB^2) + (OM^2 + r^2 - MC^2)}{2OM \cdot r} =$$
$$= \frac{OM}{r} + \frac{OM^2 + 3r^2 - (MA^2 + MB^2 + MC^2)}{2OM \cdot r},$$

ennélfogva elegendő megmutatni, hogy az utóbbi alak második törtjében az S számláló értéke 0.

Feltéve, hogy a háromszög szögeire (a szokásos jelölésekkel) $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ (de nem állhat $\alpha = \gamma$), legyen a k körülírt kör A-n átmenő átmérőjének másik végpontja A^*, AB felezőpontja C_0, és C vetülete AB-n C_1. Ekkor Thalész tétele alapján A^*B merőleges AB-re, tehát párhuzamos CM-mel, ugyanígy A^*C és BM is párhuzamosak, az MCA^*B négyszög paralelogramma, és $MC = BA^* = 2C_0 = 2r\cos BOA\sphericalangle/2 = 2r\cos\gamma$ (irány szerint is, pozitívnak véve a C_1-től C-be mutató irányt). Hasonlóan $MA = 2r\cos\alpha$, $MB = 2r\cos\beta$, és így

$$S = OM^2 + r^2(3 - 4\cos^2\alpha - 4\cos^2\beta - 4\cos^2\gamma).$$

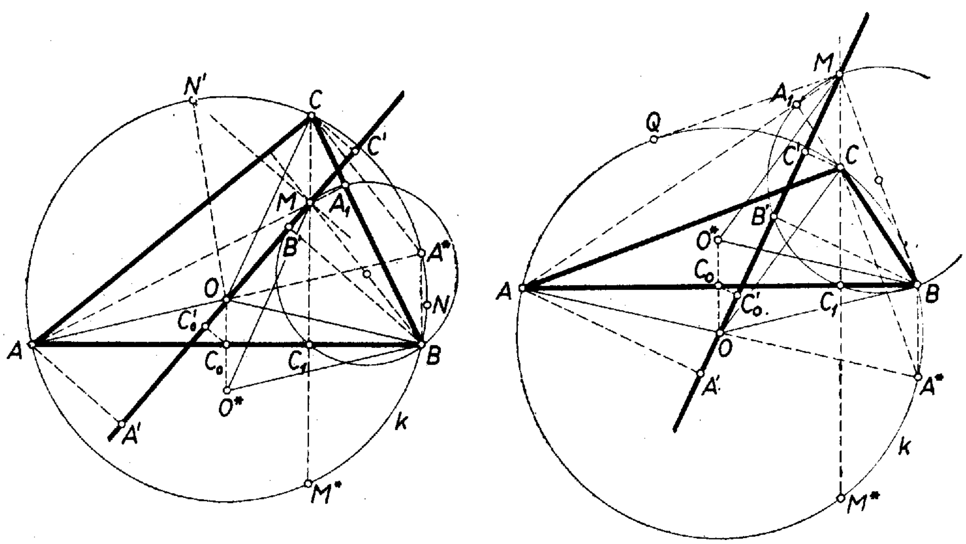
Fejezzük ki OM^2-et az OMC háromszögbő1 a koszinusz-tétellel. A vele szemben fekvő szög $\gamma < 90^\circ$ esetén

$$MCO\sphericalangle = C_1CO\sphericalangle = C_1CA\sphericalangle - OCA\sphericalangle = (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \beta - \alpha,$$

így ismert azonosságok alapján

$$\begin{aligned}
OM^2 &= r^2 + MC^2 - 2rMC\cos MCO\sphericalangle = r^2\big[1 + 4\cos^2\gamma - 4\cos\gamma\cos(\beta-\alpha)\big]\\
S &= r^2\big[4 - 4\cos\gamma\cos(\beta-\alpha) - 4\cos^2\alpha - 4\cos^2\beta\big] =\\
&= 2r^2\big[2 - \cos(\gamma+\beta-\alpha) - \cos(\gamma-\beta+\alpha) - (1+\cos 2\alpha) - (1+\cos 2\beta)\big] =\\
&= 2r^2\big[2 - \cos(180^\circ - 2\alpha) - \cos(180^\circ - 2\beta) - 1 - \cos 2\alpha - 1 - \cos 2\beta\big] = 0,
\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.



Számításunk $\gamma > 90^\circ$ esetén is érvényes, mert ekkor hasonlóan

$$MCO\sphericalangle = 180^\circ - C_1CO\sphericalangle = 180^\circ - (\beta - \alpha).$$

így $\cos MCO\sphericalangle$ helyére az előbbi kifejezés (-1)-szerese lép, viszont ugyanez áll MC-re, mert az abszolút értékére van szükség, és ez: $\mid MC \mid = \mid 2r\cos\gamma \mid = -2r\cos\gamma$. – Végül $\gamma = 90^\circ$ esetén M a C-be esik; az OMC háromszög elfajul, de ekkor egyszerűbben $M \equiv C$, $OM = r$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, és igy közvetlenül

$$S = r^2(4 - 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha) = 0.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Csanak György (Debrecen, Fazekas M. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Hogy $S = 0$, ezt trigonometriai azonosságok nélkül annak a tételnek többszöri felhasználásával is bizonyíthatjuk, hogy egy kör valamely ponton átmenő két szelője metszeteinek szorzata ugyanakkora, – miután OM^2-et kifejeztük a háromszög oldalaival és a körülírt kör sugarával.

A fentiek alapján $MC^2 = BA^{*2} = 4r^2 - c^2$, hasonlóan $MA^2 = 4r^2 - \alpha^2$, $MB^2 = 4r^2 - b^2$, és ezekkel

$$S = OM^2 + 3r^2 - (12r^2 - a^2 - b^2 - c^2) = OM^2 + (a^2 + b^2 + c^2) - 9r^2.$$

Legyenek $\gamma < 90°$ esetén az M-en át OM-re merőleges húr végpontjai N, N', és M-nek AB-re vett tükörképe M^*; ismeretes, hogy ez k-n fekszik. Így

$$MN \cdot MN' = MN^2 = MC \cdot MM^* = MC \cdot 2MC_1 = 2MC(C_1C - MC) =$$
$$= 2MC \cdot C_1C - 2MC^2,$$

folytatólag az MB átmérőjű Thalész-körhöz C-ből húzott szelők, majd az ABC háromszög AB oldalára felírt koszinusztétel alapján

$$MN^2 = ON^2 - OM^2 = r^2 - OM^2 = 2CA_1 \cdot CB - 2BA^{*2} =$$
$$= (AC^2 + BC^2 - AB^2) - 2(4r^2 - AB^2) = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2,$$
$$OM^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

és így $S = 0$. – Ugyanez adódik $\gamma > 90°$ esetén – amikor M a k-n. kívül van, és ezért az M-en átmenő második szelőként az MQ érintőt vesszük segítségül –, mert számításunkban a fentiekhez hasonlóan két előjelváltozás lép fel. $-\gamma = 90°$ esetén pedig $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 = 8r^2$ és $OM^2 = r^2$, annak megfelelően, hogy $M \equiv C$.

Szűcs József (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás: Az állítás mindkét oldalát $r = OA = OB = OC$-vel szorozva vegyük észre, hogy a bal oldal tagjai az OA, OB, OC sugárnak az OM egyenesen levő vetületeit adják – ha pozitívnak az O-ból M-be mutató irányt vesszük és a vetületek előjelét, is figyelembe vesszük. Legyenek a csúcsok vetületei OM-en rendre A', B', C', ekkor azt kell megmutatnunk, hogy

(1) $$OA' + OB' + OC' = OM.$$

Ha még a fenti jelölésekkel C_0 vetülete OM-re C_0, akkor (mindig irány szerint is tekintve) $B'C_0' = C_0'A'$, ezért

(2) $$OA' = OC_0' + C_0'A',$$

(3) $$OB' = OC_0' + C_0'B' = OC_0' - B'C_0' = OC_0' - C_0'A',$$

végül az MCC' és OC_0C_0' háromszögek hasonlóságából $MC = 2C_0O$ folytán $MC' = 2C_0'O$, és így

(4) $$OC' = OM + MC' = OM + 2C_0'O = OM - 2OC_0'.$$

Most már (2), (3) és (4) összegéből valóban (1) adódik.

Muszély György (Budapest, Vörösmarty M. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az irányított vetületeket az OA, OB, OC vektorok OM irányú összetevőinek tekintve elegendő bizonyítani, hogy a három vektor s összegének OM irányú összetevője OM. Ennél többet mutatunk meg: hogy s maga is OM-mel egyenlő. (Minden szakasz vektornak tekintendő). Legyen O tükörképe AB-re O^*, ekkor az I. megoldás szerint $O^*O = 2C_0O = BA^* = MC$, ezért OO^*MC paralelogramma, tehát $OC = O^*M$. Másrészt OAO^*B egyenlő oldalú paralelogramma, és így $OA = BO^*$ Ezekkel valóban $OA+OB+OC = BO^*+OB+O^*M = OB+BO^* = O^*M = OM$.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)