A pályák zártságához szükséges, hogy egy körüljárásuk alatt a vonat irányváltozása 360° legyen. Ez éppen elérhető, ha valamennyi görbe sínegységet felhasználjuk, éspedig valamennyit ugyanazon irányú kanyarodással. A feladat nem mondja ki, hogy valamennyi sínt be kell-e építeni, mégis a játék természetéből nyilvánvaló, hogy a játékosnak „joga van” a kihagyásra; de, mint látjuk, csak egyenes síneket mellőzhet.

Szimmetriaközéppont létezése folytán a pálya bármely csatlakozási pontja és ennek tükörképe a pályát két egybevágó, egymáshoz képest 180°-kal elforgatott félpályára osztja, ezért elég az első félpálya összeállítási lehetőségeit meghatároznunk. Ennek feltétlenül tartalmaznia kell 6 görbe sínegységet (G), lehet benne továbbá legfeljebb 4 egyenes egység (E).

Egy félpályát az egymás utáni sínegységek rövidítésével pl. így adhatunk meg: $G, G, G, E, G, G, E, E, G, E$, vagy még rövidebben: $G^3EG^2E^2GE$. De ugyanezt a teljes pályát adja – csupán más kettéosztó pontokkal – pl. az $EGEG^3EG^2E$ és – ellentétes irányban haladva – pl. a $G^2EG^3EGE^2$ leírás is (vagyis az utóbbi a pálya tengelyes tükörképét adja meg). Így kérdésünkre a választ a 6 G és legfeljebb 4 E betűből összeállítható különböző betűsorok felírásával és megszámlálásával adhatjuk meg, de ki kell zárnunk a fenti példa szerinti ismétlődéseket. Állapodjunk meg evégett a következőkben: 1) egymás utáni egynemű egységek feltétlenül G^α, ill. E^β alakban rövidítendők (tehát a második leírási példa nem használható); 2) a leírás elején G álljon (eszerint, ha van még egy betű, akkor az utolsó betű E); 3) több G-„hatvány” közül a legnagyobb „kitevőjű” veendő az első helyre; ha több ilyen van, akkor az első G után ne álljon E-nek kisebb hatványa, mint a leírás végén. Így az alábbi táblázatba foglalt félpályákat kapjuk; ebben a

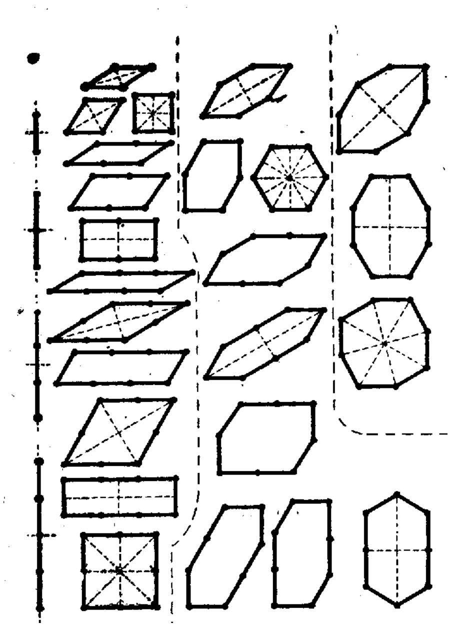
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$k=0$	G^6				
$k=1$		G^6E 2t			
$k=2$		G^6E^2 2t	G^5EGE 2t G^4EG^2E 2t G^3EG^3E 4t		
$k=3$		G^6E^3 2t	G^5E^2GE $G^4E^2G^2E$ $G^3E^2G^3E$ 2t	G^4EGEGE 2t G^3EG^2EGE $G^2EG^2EG^2E$ 6t	
$k=4$		G^6E^4 2t	G^5E^3GE $G^5E^2GE^2$ 2t $G^4E^3G^2E$ $G^4E^2G^2E^2$ 2t $G^3E^3G^3E$ 2t $G^3E^2G^3E^2$ 4t	G^4E^2GEGE G^4EGE^2GE 2t $G^3E^2G^2EGE$ $G^3EG^2E^2GE$ $G^3EG^2EGE^2$ $G^2E^2G^2EG^2E$ 2t	$G^3EGEGEGE$ 2t G^2EG^2EGEGE 2t G^2EGEG^2EGE 4t $=(G^2EGE)^2$

rendezés két szempontja: 1) hány E van a félpályában: $k = 0, 1, 2, 3, 4$; 2) ezek hány összefüggő szakaszt alkotnak: $i = 0, 1, 2, 3, 4$; természetesen $i \le k$. A táblázat egymás utáni sávjaiban 1, 1, 4, 7, 16 különböző leírás szerepel, és könnyű belátni, hogy nem lehetséges további leírás. Így a szimmetriaközépponttal bíró lehetséges pályák száma 29.

Nyilvánvaló, hogy ha egy pályának van szimmetriatengelye, akkor az átmegy az O középponton és az O-n át rá merőlegesen álló egyenes is szimmetriatengely. Lehetséges 2, 3 ilyen tengelypár is, azaz 4, ill. 6 tengely – mert 4 és 6 osztói 12-nek, a G egységek számának –; de 12 tengely már nem, mert ehhez legalább 12 E-sín, kellene. Tengely létezése a pályaleírásokból rajz nélkül is felismerhető: akkor és csak akkor létezik tengely, ha a teljes leírásnak – miután azt egy kör kerületére írtuk, bárhonnét kezdett fordított sorrendű leolvasása önmagával azonos. Pl. $G^6E^2G^6E^2$-nek 2, $G^3EG^3EG^3EG^3E = (G^3E)^4 = (EG^3)^4$-nek 4 tengelye van, hasonlóan $(G^2E)^6$-nak 6 tengelye (a táblázaton $2t$, $4t$, $6t$). Az E-nélküli pálya kör, számtalan sok tengelye van.

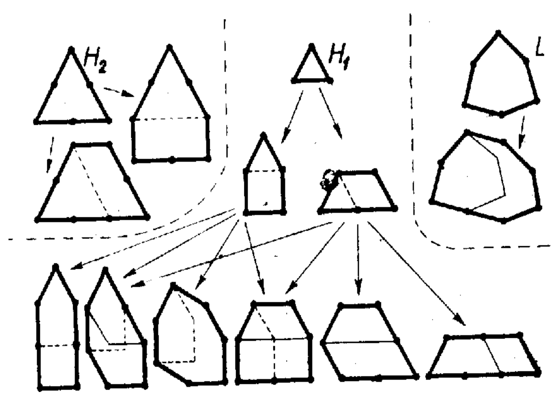
A pályák megrajzolásához célszerű előre kitűzni a középpontok K rendszerét. Ez olyan 8-, 6-, 4-szög, esetleg egyenesszakasz (2-szög), kivételesen egyetlen pont (a fenti jelöléssel 2 i-szög), mely ugyancsak tükrös a pálya szimmetriaközéppontjára és esetleges tengelyeire nézve, oldalai rendre annyi E hosszával egyenlők, ahány egymás utáni E-egység szerepel a pályában (kerülete $2k$ egység), külső szögei pedig rendre a 30°-nak annyiszorosai, ahány egymás utáni G szerepel. A pályákat a $K + K'$ összegtartományok kerületei adják, ahol K' az E-nélküli körpályát jelenti.[1] A K-rendszerek az 1. ábrán láthatók.

[1] Az összegtartomány fogalmát lásd a következő cikkben: *Kárteszi Ferenc:* Négyzetekkel burkolt konvex alakzatok. KML. XVIII. kötet, 1. sz. 4. o. (1959. január). – Egy olyen – középpont nélküli – pályát mutat az 548. gyakorlat alsó ábrája, XIX. kötet 3–4. sz. 160. o. (1959. november).



1. ábra

Vannak középpont nélküli pályák is (2. ábra), legegyszerűbb az, amelynek K-rendszere 1, vagy 2 E-nyi oldalú H szabályos háromszög.



2. ábra

Ugyancsak hármas forgási szimmetriát és három tengelyt mutat az $L=\left(G^3EGE\right)^2$ rendszer, a továbbiak ezekből tartományösszegezéssel úgy kaphatók, hogy új összeadandónak egy-egy olyan E-nyi szakaszt veszünk, melynek iránya L valamelyik oldalának iránya, ill. H oldaláé, vagy ezzel 30°-os szöget zár be. (Ez a lehetőség a középpontos pályáknál is fennáll.)

Holop András (Budapest, Petőfi S. g. III. o. t.)