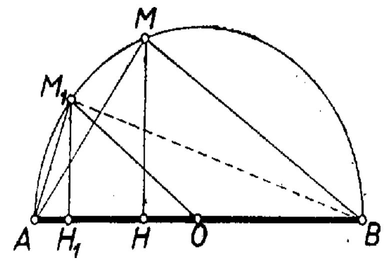


Az ABM háromszög derékszögű, és HM ennek magassága, ennélfogva ismert mértani középarányos tétel szerint $BM^2 = AB \cdot HB$, azaz $4R^2 - x^2 = 2R \cdot HB$, így $HB = 2R - x^2/2R$, és a keresett függvény:

$$y = 2x + 3\left(2R - \frac{x^2}{2R}\right) = -\frac{3}{2R}x^2 + 2x + 6R, \tag{1}$$

$$0 \le x \le 2R, \tag{2}$$

mert az x húr sem negatív nem lehet, sem $AB = 2R$-nél nagyobb.

Meg kell oldanunk az $y = l$, másképpen

$$-\frac{3}{2R}x^2 + 2x + (6R - l) = 0 \tag{3}$$

egyenletet. Diszkriminánsa

$$D = 4 + \frac{6}{R}(6R - l) = \frac{2}{R}(20R - 3l)$$

negatív, ha $l > 20R/3$, ilyenkor nincs valós gyök. $D \ge 0$, azaz $l \le 20R/3$ mellett a gyökök ($x_1 \le x_2$-vel)

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(2R - \sqrt{40R^2 - 6Rl}\right), \quad x_2 = \frac{1}{3}\left(2R + \sqrt{40R^2 - 6Rl}\right).$$

$D = 0$ mellett az $x_1 = x_2$ kétszeres gyök teljesíti (2)-t.
$D > 0$ mellett a kisebb gyök addig pozitív: $0 \le x_1$, amíg

$$2R \ge \sqrt{40R^2 - 6Rl},$$

másképpen, mivel mindkét oldal pozitív

$$4R^2 \ge 40R^2 - 6Rl, \qquad \text{azaz} \qquad 6Rl \ge 36R^2, \quad l \ge 6R.$$

A nagyobbik gyökre pedig $x_2 \le 2R$ addig áll, amíg

$$\sqrt{40R^2 - 6Rl} \le 4R, \qquad \text{amiből} \qquad 24R^2 \le 6Rl, \quad l \ge 4R.$$

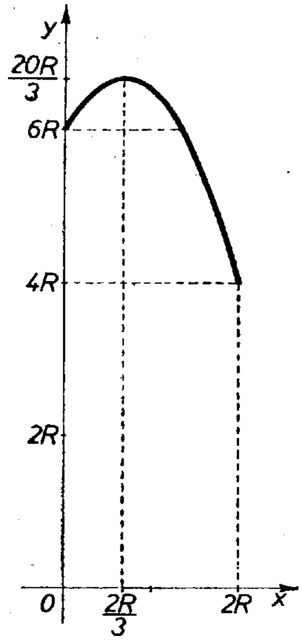
Ezek szerint

$l >$	$20R/3$	mellett	nincs	olyan	x	húr,	amelyre	$y = l$,
$l =$	$20R/3$	„	egy	olyan	x	húr van,	„	$y = l$,
$6R \le l <$	$20R/3$	„	két	„	x	„	„	$y = l$,
$4R \le l <$	$6R$	„	egy	„	x	„	„	$y = l$,
$l <$	$4R$	„	nincs	olyan	x	húr,	amelyre	$y = l$.
$l =$	$6R$	esetén $x = 0$, így $M \equiv A$; $l = 4R$ esetén $x = 2R, M \equiv B$.						

A vizsgált függvény így is írható:

$$y = -\frac{3}{2R}\left(x - \frac{2R}{3}\right)^2 + \frac{20R}{3}. \tag{3a}$$

A változó tag sohasem pozitív, y legnagyobb, ha $x - 2R/3 = 0$, azaz $x = 2R/3$, ekkor $y = 20R/3$. Amíg x a 0-tól $2R/3$-ig, nő, addig ($3a$) első tagjának alapja és a négyzet csökken, $-3/2R$-szerese növekszik, y növekszik, e szakaszon legkisebb értéke $x = 0$-nál $y = 6R$. Amíg x a $2R/3$-tól $2R$-ig nő, addig ($3a$) első tagjának alapja és a négyzet növekszik, $-3/2$R-szerese csökken, y csökken, legkisebb értéke $x = 2R$-nél $y = 4R$.



Ezek szerint az $y = l$ egyenes a görbét [az (1) másodfokú függvényt ábrázoló parabolának a (2) intervallum fölötti ívét] $l < 4R$ és $l > 20R/3$ esetén nem metszheti, mert az ívnek nincs l-ordinátájú pontja. $4R \leq l < 6R$ esetén egy pontban, $6R \leq l < 20R/3$ esetén két pontban metszi, $l = 20R/3$ esetén érinti, egy közös pontjuk van. Mindez valóban megfelel a (3) diszkussziójában találtaknak.

A maximális y-t adó $x_m = 2R/3$ értékkel az $AOM_1 = \alpha$ szög hegyes szög, mert $x_m < R$ folytán M_1 a félkörív A-tól számított első harmadán fekszik, $\alpha < 60°$. Ehhez $\cos\alpha = H_1O/M_1O = (H_1B - OB)/R$-ből HB fenti kifejezésével $H_1B - OB = R - x_m^2/2R = 7R/9$; így $\cos\alpha = 7/9$, $\sin\alpha = 4\sqrt{2}/9$, $\operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{2}/7$ és $\operatorname{ctg}\alpha = 7/4\sqrt{2}$.

Mihályffy László (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)