

Kifejezésünk mindkét tagja „teljes köb” (egész együtthatós racionális egész kifejezés köbe):  $x^{12} = (x^4)^3$ ,  $-3^6 y^{12} = (-3^2 y^4)^3$ . Ennélfogva próbálhatunk olyan megoldást keresni, amelyben a két kéttagú kifejezés egyik-egyik tagja  $x^4$ , ill.  $-3^2 y^4$ , vagyis olyan (0-tól különböző)  $Z$  és  $V$  egytagút, amellyel áll:

$$(1) \quad (x^4 + Z)^3 + (V - 3^2 y^4)^3 \equiv x^{12} - 3^6 y^{12},$$

vagyis kifejtve:

$$(1a) \quad (3x^8 Z + 3x^4 Z^2 + Z^3) + (V^3 - 3^3 V^2 y^4 + 3^5 V y^8) \equiv 0.$$

Próbálkozzunk olyan  $Z$  és  $V$ -vel, amely változóként  $x$ ,  $y$ -nak csak pozitív egész kitevős hatványait tartalmazza. Ekkor az első háromtagú  $y$ -nak biztosan növekvő hatványai szerint van rendezve, és a második zárójel tagjai is vagy növekvő vagy csökkenő rendben tartalmazzák  $y$  egy-egy hatványát, mert a 2-ik, és a 3-ik tag változó része az előtte állónak egyaránt  $y^4/V$ -szerese. Így az azonossághoz szükséges, hogy a két középső tag egymásnak  $-1$ -szerese legyen:

$$(2) \quad 3x^4 Z^2 = 3^3 V^2 y^4, \quad \text{másképpen} \quad Z^2/V^2 = 3^2 y^4/x^4.$$

Eszerint már lehetetlen, hogy a második zárójel tagjai  $y$  csökkenő hatványai szerint legyenek rendezve, mert ez a feltevés  $Z^3 = -V^3$  révén  $Z^3/V^3 = -1$ -re és  $Z^2/V^2 = 1$ -re vezet, ezért (2) az  $x$  és  $y$ -nak csak bizonyos értékpárjaira teljesülhet, és így (1) nem állhat fenn  $x$ ,  $y$  bármely értékpárjára. A másik lehetőség, a

$$(3) \quad 3x^8 Z = -V^3 \quad \text{és} \quad (4) \quad Z^3 = -3^5 V y^8$$

egyenlőségek nem vezetnek (2)-vel ellentmondásra, mert megfelelő oldalaik összeszorzásából  $Z^4/V^4 = 3^4 y^8/x^8$  adódik, és ez (2)-nek következménye. Eszerint pl. (4) elhagyható.

Most már  $Z$ -nek (3)-ból vett kifejezését (2)-be téve kapjuk:  $V = \pm 3x^3 y$ , és így  $Z = \mp 3^2 x y^3$ .

Mindkét megoldás megfelel követelményeinknek, ugyanis

$$x^{12} - 3^6 y^{12} \equiv (x^4 - 3^2 x y^3)^3 + (3x^3 y - 3^2 y^4)^3 \equiv (x^4 + 3^2 x y^3)^3 + (-3x^3 y - 3^2 y^4)^3.$$

*Mezey Ferenc* (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t)