Jelöljünk minden előre beírt számot c-vel, minden kiszámítandót x-szel, és különböztessük meg őket úgy, hogy indexnek írjuk soruk, majd oszlopuk sorszámát; legyen továbbá az ugyanakkora összeg S. Ismeretleneink száma $2n+1$, $2n$ beírandó szám (az n-edik sorban n, az n-edik oszlopban további $n-1$, és x_{11}) és az összeg. Ugyanennyi a használható egyenleteink száma is, ugyanis bár a feladat $2n+2$ vonalon (n soron, n oszlopon és 2 átlón) írja elő az S összeget, de az n sor összege egyenlő az n oszlop összegével, azért ez a $2n$ egyenlet nem független egymástól, bármelyikük – de csak egyikük – következménye a többieknek. Valamennyi egyenletünk elsőfokú, várható tehát, hogy a felírandó rendszer megoldható, azaz ellentmondásmentes. Bizonyítási feladatunkat éppen ennek megmutatásával, a megoldás felírásával teljesítjük; innen adódik ki a válasz a további kérdésekre is.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots c_{1,n-1} & x_{1n} & \longleftrightarrow & S \\
 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots c_{2,n-1} & x_{2n} & \longleftrightarrow & S \\
 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots c_{3,n-1} & x_{3n} & \longleftrightarrow & S \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & & \cdot \\
 & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \dots c_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} & \longleftrightarrow & S \\
 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots x_{n,n-1} & x_{nn} & \longleftrightarrow & S \\
\swarrow\!\!\nearrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\ \nwarrow\!\!\searrow & & \\
S & S & S & S & S & S \quad S & &
\end{array}$$

Táblázatunk alapján jól elképzelhetők az egyenletek anélkül, hogy formálisan felírnók őket. Figyeljük meg, hogy ha vesszük a sorokat az első és utolsó kivételével és a két átlót, ebben ugyanazok az ismeretlenek szerepelnek, mint az első és az utolsó oszlopban. Vegyük ezért a mondott $n-2$ sornak és a két átlónak az összegét és vonjuk ki belőle a két szélső oszlop összegét. Így egyrészt a keresett összeg $(n-2)+2-2=n-2$-szeresét kapjuk, másrészt valamennyi belső szám és a két átló belső számainak összegét (vagyis az átlóbeli beírt számok 2-szer veendők és páratlan n esetén az átlók közös száma 3-szor). Az utóbbiak mindegyike ismert szám, $n-2\neq 0$, mert $n-2\geq 1$, tehát az állandó összeg meghatározható. Legyen a belső számok összege B, a fő- és a mellékátló belső számainak összege f és m, így

$$S=\frac{B+f+m}{n-2}. \tag{1}$$

Most már az n-edik oszlop és az n-edik sor belső számai egyismeretlenes egyenletből számíthatók:

$$x_{in}=S-c_{i1}-s_i, \qquad x_{ni}=S-c_{1i}-o_i,$$

ahol $i=2,3,\ldots,n-1$, továbbá o_i és s_i az i-edik oszlop, ill. sor belső számainak összege. – Az n-edik oszlop belső számainak o_n összegét az egyes számok kiszámítása nélkül az előzőkhöz hasonlóan úgy kapjuk, hogy a belső sorok összegéből – ami a fentiek szerint egyenlő a belső négyzet számainak és az átlók belső számainak összegével – kivonjuk a belső négyzet valamennyi számát és az első oszlop belső számainak o_1 összegét. Így a kívánt összeg a két átló összege, kisebbítve az első oszlop belső számainak összegével:

$$o_n=(n-2)S-B-o_1=f+m-o_1. \tag{2}$$

Hasonlóan az n-edik sor belső számainak összege:

$$s_n=(n-2)S-B-s_1=f+m-s_1. \tag{3}$$

Bármelyik sarokszámra most már úgy kapunk egyismeretlenes egyenletet, ha sorának és oszlopának összegéből kivonjuk a rajta át nem menő átló összegét, pl. x_{11}-re, majd hasonlóan x_{nn},x_{1n},x_{n1}-re (1) alapján

$$\begin{aligned}
2x_{11}+s_1+o_1-m&=S+S-S=S,\\
x_{11}=\frac{1}{2}(S-s_1-o_1+m)&=\frac{B+f+(n-1)m}{2n-4}-\frac{s_1}{2}-\frac{o_1}{2},\\
x_{nn}&=\frac{B-(2n-5)f-(n-3)m}{2n-4}+\frac{s_1}{2}+\frac{o_1}{2},\\
x_{1n}&=\frac{B+f-(n-3)m}{2n-4}-\frac{s_1}{2}+\frac{o_1}{2},\\
x_{n1}&=\frac{B+f-(n-3)m}{2n-4}+\frac{s_1}{2}-\frac{o_1}{2}.
\end{aligned}$$

Hogy az így teljessé vált megoldás valamennyi követelményt kielégíti, azt behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, a legtöbb ismeretlent tartalmazó két egyenlet (n-edik sor, n-edik oszlop) esetében ezt könnyítik a (2) és (3) összegek. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását, egyben látjuk, hogy a beírás csak egyféleképpen lehetséges.

(1) – (3) szerint S csak a belső számoktól függ, o_n, és s_n pedig csak az átlóbeli belső számoktól és a szemben fekvő oldal belső számaitól. A sarokszámok mindenesetre függnek a szélső számoktól és a belső, de átlóba nem eső számoktól, ezek együtthatói ugyanis a kifejezésekben $\pm 1/2$, ill. $1/(2n-4)$. Az átlóbeli c_{ii} ill. $c_{i,n+1-i}$ számok, valamint $n=2k-1$ esetére a két átló közös c_{kk} száma a kifejezések első tagjában többször szerepel, együtthatójuk számlálóját az alábbi összeállítás mutatja:

		$x_{11}-ben:$	$x_{nn}-ben:$	$x_{1n}-ben:$	$x_{n1}-ben:$
c_{ii}	$i\neq n+1-i$	$1+1=2$	$1-(2n-5)=2(3-n)$	2	2
$c_{i,n+1-i}$	$i\neq n+1-i$	n	$4-n$	$4-n$	$4-n$
c_{kk}	$n=2k-1$	$n+1$	$3(3-n)$	$5-n$	$5-n$

Eszerint $n\geq 6$ esetén minden sarokszám függ minden eredetileg beírt számtól, $n=5$ esetén x_{15} és x_{51} nem függ c_{33}-tól.

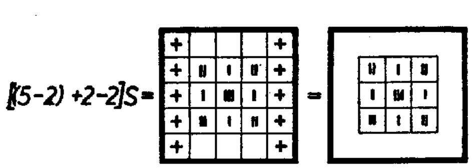
$n=3$ mellett B, f, és m egyetlen tagja c_{22} és $S=3c_{22}$, ezért a középső sor, oszlop és az átlók egymás utáni számai számtani sorozatot alkotnak; előbbi táblázatunk első két sora itt tárgytalan. A kérdés azonos az 530. gyakorlat[1] T_1^* táblázatának előállításával.

$n=4$ esetén $B=f+m$, így $S=B=c_{22}+c_{23}+c_{32}+c_{33}$, másképpen: a négy belső szám is az állandó összeget adja. Ennélfogva ugyanaz áll a négy sarokszámra is, amelyek B-t a két átlónak $2S$ összegére egészítik ki, valamint ugyanazért külön-külön a szélső sorok és a szélső oszlopok $2+2=4$ belső számára. Előbbi táblázatunk második sora szerint a mellékátló két belső számától csak x_{11} függ, a mellékátló két végén álló x_{14} és x_{41} sem. Ez első hallásra meglepő, de az $S=m+f$ alakból belátható, hogy vagy mindegyikük függ tőlük, vagy egyikük sem. A táblázat így alakul:

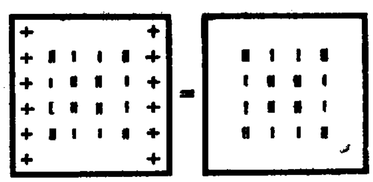
$c_{23}+c_{32}+\frac{1}{2}(c_{22}+c_{33}-$ $-c_{12}-c_{13}-c_{21}-c_{31})$	c_{12}	c_{13}	$\frac{1}{2}(c_{22}+c_{33}+c_{21}+c_{31}-$ $-c_{12}-c_{13})$
c_{21}	c_{22}	c_{23}	$c_{32}+c_{33}-c_{21}$
c_{31}	c_{32}	c_{33}	$c_{22}+c_{23}-c_{31}$
$\frac{1}{2}(c_{22}+c_{33}+c_{12}+c_{13}-$ $-c_{21}-c_{31})$	$c_{23}+c_{33}-c_{12}$	$c_{22}+c_{32}-c_{13}$	$\frac{1}{2}(c_{12}+c_{13}+c_{21}+c_{31}-$ $-c_{22}-c_{33})$

Parti Enikő (Budapest, Bagi Ilona lg. III. o. t.)

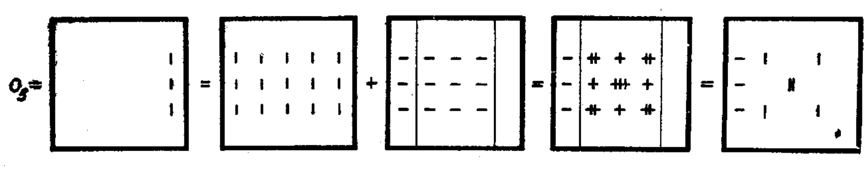
Megjegyzések. 1. S kiszámítására vezető meggondolásunkat $n=5$ és $n=6$ esetére úgy szemléltetjük, hogy a kifejezés tagjai helyére „ | ”, ill „ – ” jelet írunk aszerint, hogy a kérdéses tagot felvettük, ill. kivontuk. Csupa olyan tagot vontunk csak ki, amelyet előzőleg felvettünk, ezért „ – ” jel magában nem áll, csak „ | ” jelre ráírva, ami együtt „ + ”-nak látszik, ez azonban végeredményben a kifejezésből való hiányzást jelöli (1. és 2. ábra). Hasonlóan szemlélteti az o_n összeg meghatározását a 3. ábra, x_{11}-ét a 4. ábra, mindkettő $n=5$-re.



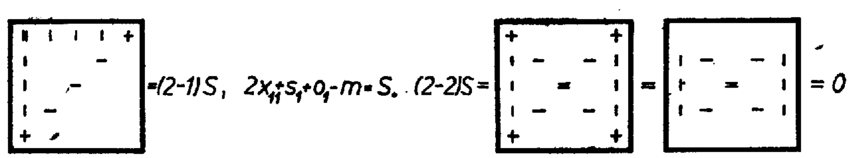
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

5. ábra

2. A (2) és (3) összefüggésekből átalakítással és egybekapcsolással tetszetős összefüggés adódik:

$$o_1+o_n=f+m=s_1+S_n.$$

[1] Lásd XIX. kötet 123. o. (1959. november)

Ennek első részéhez (0-ra redukált alakban) egyszerűbben vezet el az 5. ábrán szemléltetett elgondolás.

3. $n=2$-vel nem volna előzetesen beírt szám, nem is létezik másodrendű „bűvös négyzet". $n=1$ esetén viszont – bár elfajult értelemben, ti. egytagú összegekkel – van megoldás: bármely szám tekinthető elsőrendű bűvös négyzetnek.

4. Több dolgozat „tetszés szerinti szám"-on a hétköznapi szóhasználatot követve – csak egész, sőt továbbmenve csak természetes számot értett – és azt is vizsgálta, mely feltételek mellett lesznek S és az x-ek egész, ill. pozitív számok.