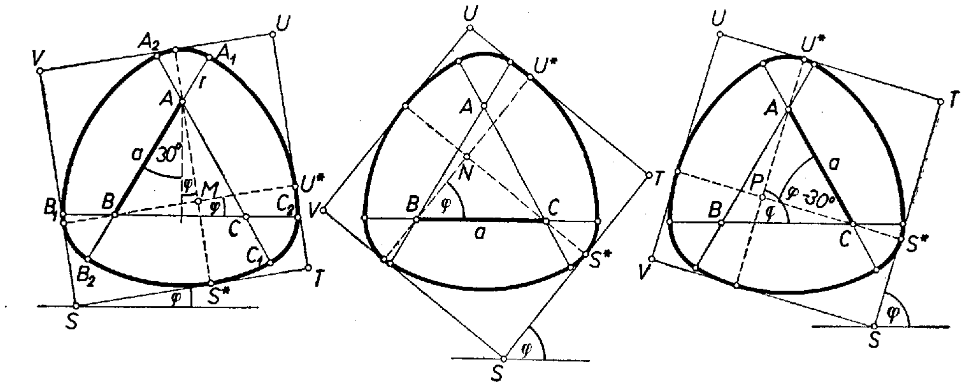
Forgatás közben az **R** idom bármely helyzetben négy ponton érintkezik a **K** kerettel, ennek mindegyik oldalán egy pontban. Nyilvánvaló, hogy **R** kerületének minden pontja érintkezésbe jut **K**-val, fordítva azonban nem, pl. **K** csúcsai és egy bizonyos környezetük nem jutnak érintkezésbe **R**-rel. De ha **K** egy oldalának D és E pontja érintkezhet **R**-rel, akkor a DE szakasz minden pontja érintkezhet. Ezért a kérdést úgy is feltehetjük, hogy mekkorák **K** oldalainak azon szakaszai, amelyek nem érintkezhetnek **R**-rel, mekkora az a legrövidebb távolság, amennyire az érintkezési pont lehet **K** csúcsaitól. – Célszerűbb a folyamatot úgy követni, hogy **K**-t forgatjuk az álló **R** körül, így ugyanis **K** négyes forgási szimmetriáját kényelmesebben kihasználhatjuk, mint **R** hármas forgási szimmetriáját. Elegendő a mozgást pl. addig figyelni, amíg **K**-nak ST oldala a BC-vel párhuzamos helyzetből $+90^\circ$ elfordulással BC-re merőleges helyzetbe, TU helyére jut, felírni ST és TU érintési pontjának, S^*-nak és U^*-nak T-től való távolságát, mint BC és az ST oldal φ hajlásszögének függvényét, amíg $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.



Amíg $0^\circ \le \varphi \le 30^\circ$, addig ábránk jelöléseivel S^* az A középpontú B_2C_1 ív C_1 oldalán levő felének egy pontjában érinti **R**-t, majd $30^\circ \le \varphi \le 90^\circ$ mellett a C-középű C_1C_2 ív egy pontjában; U^* pedig $0^\circ \le \varphi \le 60^\circ$-ig a B középű C_2A_1 íven, $60^\circ \le \varphi \le 90^\circ$-ig az A-középű A_1A_2 íven érinti **R**-et. A TS^* hosszát a TU oldal állása szabja meg, a TU^*-ét pedig az ST-é, ezért a keresett hosszakat a $(0^\circ, 30^\circ)$, $(30^\circ, 60^\circ)$, $(60^\circ, 90^\circ)$ intervallumokra külön-külön kell megállapítanunk.

I. $0^\circ \le \varphi \le 30^\circ$ mellett $ST \perp AS^*$ és $TU \perp BU^*$, azért

$$TS^* = U^*M = U^*B - MB = (a+r) - a\sin(30^\circ + \varphi) \quad \text{és}$$
$$TU^* = S^*M = S^*A - MA = (a+r) - a\cos(30^\circ + \varphi).$$

TS^* legkisebb értéke $\varphi = 30^\circ$-nál adódik, amikor a levonandó MB a legnagyobb, mert $30^\circ \le 30^\circ + \varphi \le 60^\circ$, $\sin(30^\circ + \varphi)$ a φ szóban forgó értékeire növekvő és $TS^*_{\min} = r + a(1 - \sqrt{3}/2) = p$; ugyanennyi $TU^*_{\min}$ is, $\varphi = 0^\circ$ mellett, mert a cosinus függvény a vizsgált intervallumban csökkenő.

II. $30^\circ \le \varphi \le 60^\circ$ mellett $ST \perp CS^*$, és még mindig $TU \perp BU^*$, így

$$TS^* = U^*N = (a+r) - a\cos\varphi,$$

$\varphi = 30^\circ$-kal $TS^*_{\min} = p$, másrészt

$$TU^* = S^*C + CN = r + a\sin\varphi$$

és $TU_{\min} = r + a/2 = q$, ugyancsak $\varphi = 30^\circ$-kal, mert így a legkisebb a hozzáadandó tag.

A $\varphi = 30^\circ$ eset az I. és II. intervallumok közös határpontja; eszerint a $\varphi = 30^\circ$ helyzet környezetében S^* az ST oldal S_0 felezőpontjától közeledik T-hez, majd visszafordul S_0 felé. Ugyanekkor $q = (a+2r)/2$, vagyis U^* a TU oldal U_0 felező pontjába esik (ez nyilván nem bizonyul majd valamennyi lehetséges érték legkisebbikének), és U^* a T-től U felé halad.

III. Végül $60^\circ \le \varphi \le 90^\circ$ mellett változatlanul $ST \perp CS^*$, de már $TU \perp AU^*$, így

$$TS^* = U^*P = U^*A + AP = r + a\sin(\varphi - 30^\circ),$$

és $TS^*_{\min} = q$, mert $30^\circ \le \varphi - 30^\circ \le 60^\circ$ folytán AP akkor a legkisebb, ha $\varphi - 30^\circ = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$. (S^* az S_0-tól S felé halad.) Másrészt

$$TU^* = S^*P = S^*C + CP = r + a\cos(\varphi - 30^\circ),$$

és $TU^*_{\min} = q$, mert $CP_{\min}$ $\varphi = 90^\circ$ mellett áll elő ($U^* \equiv U_0$).

TS^* és TU^* egymás után adódott p, p, q, ill. p, q, q legkisebb értékei közül p kisebb, mert $1 - \sqrt{3}/2 < 1/2$. $TU^*_{\min}$ egyszersmind SS^* legkisebb értékét is adja, így az ST oldal (és bármelyik oldal) súrolt szakaszának hossza $ST - 2p = (a+2r) - 2r - a(2-\sqrt{3}) = a(\sqrt{3} - 1)$, független r-től.

Dávid Gábor (Székesfehérvár, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. Haladhattunk volna TS^* és TU^* legnagyobb értékeit megkeresve is. – Számos dolgozat nem indokolta a forgatási folyamattal, miért tekint három esetet: amikor ST és TU mindegyike **R**-nek $a + r$ sugarú („nagy”) ívét érinti, vagy mindkettő „kicsit” – vagy egyik nagyot, a másik kicsit – bár több típus valóban nem lehetséges.