Legyen a sorozat első tagja c, hányadosa q, mindkettő pozitív. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$c(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) \leq cn\frac{1+q^{n-1}}{2},$$

vagy $c/2$ (>0)-vel osztva és párokat alakítva

(1) $$(1+q^{n-1})+(q+q^{n-2})+\ldots+(q^{n-1}+1) \leq (1+q^{n-1}).$$

A bal oldalon n kéttagú áll, mindegyik q^k+q^{n-k-1} alakú, ahol $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, és mindig érvényes

(2) $$q^k+q^{n-k-1} \leq 1+q^{n-1}.$$

Ugyanis 0-ra redukálással teljesül

$$1+q^{n-1}-q^k-q^{n-k-1}=(1-q^k)(1-q^{n-k-1}) \geq 0,$$

mert $q \neq 1$ esetén a két tényező egyenlő előjelű, $q=1$ esetén pedig mindkettő 0. Most már (2)-t k minden fenti értékére felírva és összeadva (1) adódik.

Csizmadia Béla (Székesfehérvár, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1. Nem használtuk ki az $n \geq 3$ feltevést. Erre nincs is szükség, mert az állítás $n=1$, 2-re is igaz, ekkor – továbbá $q=1$ esetén bármely n-re – a sorozat összege *egyenlő* a számtani közép n-szeresével, tehát nem nagyobb nála. $n \geq 3$ esetén van közbülső tag is, és így $q \neq 1$ mellett az összeg kisebb, mint a közép n-szerese.

2. Többen arra hivatkoztak, hogy a sorozat tagjait az $y=cq^x$ exponenciális függvény azon pontjai ábrázolják, amelyekre $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, és hogy minden exponenciális görbe domború, ha az Y-tengely mentén a növekvő y-ok irányában (röviden: alulról) nézzük. Ez azonban nem bizonyíték; a görbék domború vagy homorú voltát bizonyítani csak számviszonyok alapján lehet, miután több grafikon megrajzolásából sejtést alakítottunk ki magunkban, és esetleg a bizonyításhoz ötletet is kaptunk.

3. Az állítás teljes indukcióval is bizonyítható.