Írjuk fel az 555. gyakorlatban [1] bebizonyított

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

kettős egyenlőtlenséget az $n=17161$, 17162, $\ldots$, $1\,000\,000$ számokra:

$$\begin{array}{lllll}
2\sqrt{17\,162} & -2\sqrt{17\,161} & <1/\sqrt{17\,161} & <2\sqrt{17\,161} & -2\sqrt{17\,160}\\
2\sqrt{17\,163} & -2\sqrt{17\,162} & <1/\sqrt{17\,162} & <2\sqrt{17\,162} & -2\sqrt{17\,161}\\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \\
2\sqrt{1\,000\,000} & -2\sqrt{999\,999} & <1/\sqrt{999\,999} & <2\sqrt{999\,999} & -2\sqrt{999\,998}\\
2\sqrt{1\,000\,001} & -2\sqrt{1\,000\,000} & <1/\sqrt{1\,000\,000} & <2\sqrt{1\,000\,000} & -2\sqrt{999\,999}
\end{array}$$

Mindezeket összeadva „középen” a szóban forgó S összeg adódik, balról, ill. jobbról pedig csak két-két tagot kapunk, mert a 17 162-től 1 000 000-ig, ill. 17 161-től 999 999-ig terjedő természetes számok négyzetgyökének 2-szerese kétszer-kétszer lép fel, ellentett jellel, így kiesik:

$$2\sqrt{1\,000\,001}-2\sqrt{17\,161}<S<2\sqrt{1\,000\,000}-2\sqrt{17\,160}.$$

Itt két négyzetgyök egész eredményre vezet: 131, ill. 1 000, a másik kettőről pedig elég ennyit tudnunk: $\sqrt{17\,160}>130{,}5$, ill. $\sqrt{1\,000\,001}>1\,000$ (amit négyzetre emeléssel ellenőrizhetünk), helyettük ezeket a számokat írva a jobb oldalt nagyobb számmal pótoljuk, a bal oldalt pedig kisebbel, tehát az egyenlőtlenségek „erősebbekké válnak”:

$$2\cdot 1000-2\cdot 131<S<2\cdot 1000-2\cdot 130{,}5$$

azaz

$$1738<S<1739.$$

Ezzel a kérdéses összeget bezártuk két szomszédos természetes szám közé.

Budai Zsuzsanna (Budapest, Lorántffy Zs. uti lg. III. o. t.)

[1] Lásd a megoldást KML XIX. kötet 135. o. 1959. november.