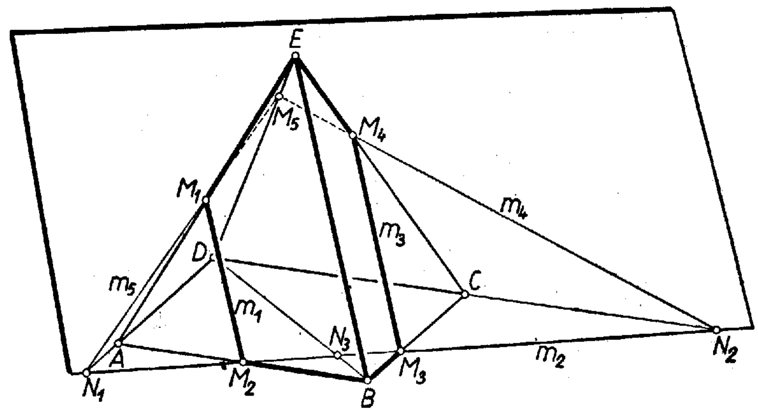
Legyen a kérdéses S sík, és az AE, AB, BC él metszéspontja rendre M_1, M_2 M_3.



1. ábra

Az $ABCD$ alapsíkot S az $M_2M_3 = m_2$ egyenesben metszi, ezért A és C az S-nek a B-vel ellentétes oldalán van, és ugyanez áll D-re is, mert D az AC átlónak B-vel ellentétes oldalán van. Eszerint S, azaz m_2 az AD, CD alapéleket (mint szakaszokat) nem metszi, de meghosszabbításaikat igen, mert metszi a velük párhuzamos BC, ill. AB egyenest, és ha két párhuzamos egyikét egy a síkjukban fekvő egyenes metszi, akkor a másikát is. m_2-nek AD-vel való metszéspontjára $AN_1 = BM_3 = BC/3 = AD/3$, mert az AN_1M_2 és BM_3M_2 háromszögek egybevágók ($AM_2 = BM_2$, M_2-nél fekvő szögeik csúcsszögek, A és B-nél fekvő szögeik váltószögek). m_2 és CD-nek N_2 metszéspontjára pedig $CN_2 = 2BM_2 = BA = CD$, mert a CM_3N_2 és BM_3M_2 háromszögek hasonlók (itt is két szög egyenlő és $CM_3 : BM_3 = 2 : 1$). Ezek szerint N_1-re $DN_1 : N_1A = 4 : 1$, és N_2-re $DN_2 : N_2C = 2 : 1$.

Másrészt S az ABE oldallap síkját $M_1M_2 = m_1$-ben metszi, így E az S-nek ugyanazon oldalán van, mint B, vagyis ellentétes oldalán, mint C és D, eszerint S az EC, ED élt metszi egy M_4, M_5 pontban, és az EB élt nem metszi. Pontosabban: M_1M_2 az ABE háromszögnek a BE oldallal párhuzamos középvonala, tehát S párhuzamos BE-vel. Ezért S-nek a BCE síkkal való $M_3M_4 = m_3$ metszésvonala párhuzamos BE-vel és $EM_4 : M_4C = BM_3 : M_3C = 1 : 2$, vagyis M_4 az EC-nek E-höz közelebbi harmadoló pontja. Hasonlóan S-nek a BE-n átmenő BED síkkal való $M_5N_3 = m_6$ metszésvonala is párhuzamos BE-vel (N_3 e metszésvonalnak az alapidom síkjával, más szóval m_2-nek a BD átlóval való metszéspontja), ezért – felhasználva a BM_3N_3 és DN_1N_3 háromszögek hasonlóságát – $EM_5 : M_5D = BN_3 : N_3D = BM_3 : DN_1 = AN_1 : DN_1 = 1 : 4$, vagyis M_5 az ED élnek E-höz közelebbi ötödölő pontja.

Mindezek szerint S a gúla 8 éle közül ötöt belső pontban metsz (a metszetidom az $M_1M_2M_3M_4M_5$ ötszög), két élt meghosszabbításában metsz és eggyel párhuzamos.

Komlóssy György (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1. Az alapidomról csak azt használtuk ki, hogy paralelogramma; nem használtuk ki az oldalélek egyenlőségét sem, így számításaink eredményei minden olyan paralelogramma alapú gúla síkmetszetére érvényesek, amelyekben az adott metszéspontok a megfelelő élt az adott arányokban osztják.

2. Hogy $BN_3 = BD/5$, ez abból is kiadódik, hogy egyrészt BD felezi az ABC szöget, így $M_3N_3 : N_3M_2 = M_3B : BM_2 = 6M_3B : 6BM_2 = 2CB : 3BA = 2 : 3$, tehát $M_3N_3 : M_3M_2 = 2 : 5$, másrészt $M_2N_1 = M_2M_3$ tehát $BN_3 : BD = M_3N_3 : (M_3N_3 + N_3M_2 + M_2N_1) = 2 : (2+3+5) = 1 : 5$. – Itt kihasználtuk, hogy az alapidom rombusz.

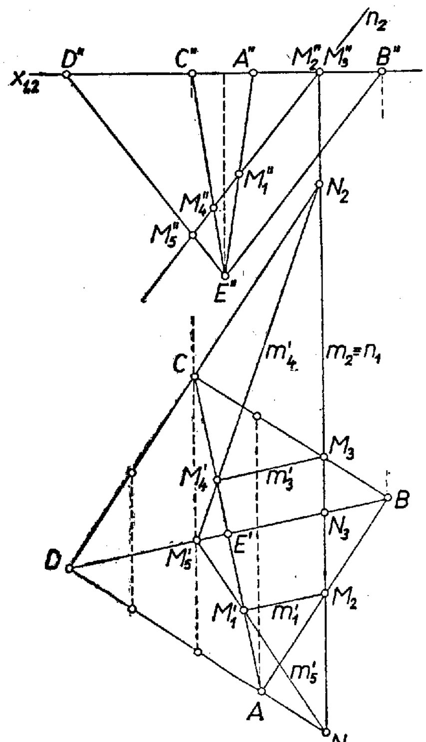
Tomcsányi Gyula (Budapest, Toldy F. g. II. o. t.)

3. M_5 osztásarányát a Menelaosz-tétel alapján is kiszámíthatjuk, akár az AED, akár a CED háromszög révén.[1] Ugyanis mindkettőben ismerjük S-sel alkotott m_5, ill. m_4 metszésvonaluk két metszéspontjának, N_1 és M_1-nek, ill. M_4 és N_2-nek osztóviszonyát: $(DAN_1) = -4$, $(AEM_1) = 1$, ill. $(DCN_2) = -2$, $(CEM_4) = 2$, és ezek felhasználásával $(DAN_1)(AEM_1)(EDM_5) = -1$, ill. $(DCN_2)(CEM_4)(EDM_5) = -1$ bármelyikéből $(EDM_5) = 1/4$, azaz $EM_5 : M_5D = 1 : 4$.

Kolonits Ferenc (Budapest, Piarista g. IV. o. t)

4. Kérdésünkre az ábrázoló geometria módszereivel végzett szerkesztés és erre támaszkodó számítás alapján is könnyen válaszolhatunk, mert párhuzamos vetítéssel egy egyenesen vagy párhuzamos egyeneseken fekvő egyenlő szakaszok vetületei egyenlők, ill. ilyen helyzetű szakaszok aránya nem változik meg. A 2. ábrán első képsíknak a gúla alapsíkját vettük, másodiknak pedig egy az S-re merőleges síkot.

[1] L. pl. Kárteszi Ferenc: A Menelaos- és a Ceva-féle tétel, KML. XI. kötet, 67–75. o. 1955. november.

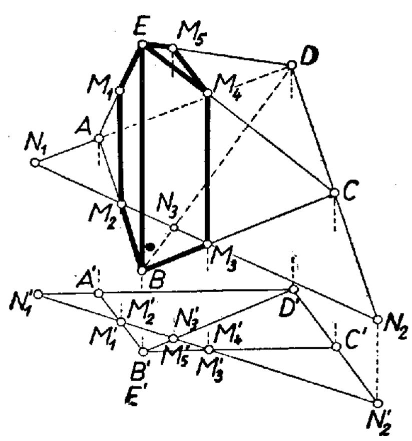


2. ábra

Így S vetítősík, a metszetidom az n_2 második nyomvonalban látszik. A főleg a második képre támaszkodó számításban kihasználjuk, hogy $A''B'' = 2M_2''B'' = C''D''$ és $C''B'' = 3M_3''B'' = 3M_2''B''$, tehát A'', C'', M_2'' a $B''D''$-t $2+3=5$ egyenlő részre osztó pontok közül valók.[2]

Hegedűs István (Budapest, József A. g. III. o.t.)

5. Hasonlóan egyszerű a számítás alakzatunknak egy BE élre merőleges T síkon levő (derékszögű, párhuzamos vetítéssel képezett) vetületéből.



Ekkor $A'B'C'D'$ paralelogramma, $E' \equiv B'$, így $M_1' \equiv M_2'$, ezért M_1M_2 – és vele S is – merőleges T-re, tehát a vetítési irányból nézve S „élben”, az M_1', $M_3' = m_2'$ egyenesben látszik. Így M_4' (mint m_2' és $E'C'$ metszéspontja) azonos M_3'-vel, tehát $EM_4 : M_4C = E'M_4' : M_4'C' = B'M_3' : M_3'C' = BM_3 : M_3C = 1:2$. Az M_5 pont osztási aránya $M_5' \equiv N_3'$ alapján a fentiekhez hasonlóan adódik.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

6. Többen térbeli koordinátageometriai úton, vagy vektorok használatával adtak választ.

[2] Az első képen a fentebbi megoldás N-pontjai is fel vannak tüntetve; jobb térkihasználás, érdekében E az első képsík alatt van.