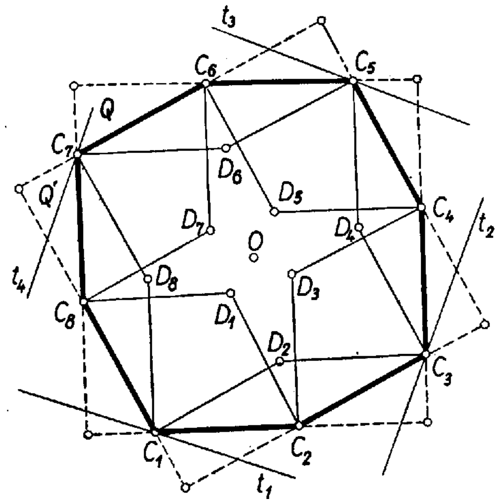
I. megoldás: Legyen a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q'}$ négyzetek közös része a $\mathbf{C}$ nyolcszög. $\mathbf{Q}$-t és $\mathbf{Q'}$-t közös O középpontjuk körül 90°-kal elforgatva mindkettő önmagába megy át, így ugyanez áll $\mathbf{C}$-re is.



Ha t_1 egy támaszegyenese $\mathbf{C}$-nek, akkor a belőle O körül egymás utáni 90°-os elforgatásokkal előálló t_2, t_3, t_4 is támaszegyenese $\mathbf{C}$-nek, és e négy egyenes együtt támasznégyzete a $\mathbf{C}$-nek, mert egyrészt közülük bármelyik egymás utáni kettő derékszöget alkot, másrészt a szemben fekvő t_1 t_3, és t_2, t_4 párok távolsága egyenlő t_1 O-tól való távolságának kétszeresével, és így egymással is. Eszerint $\mathbf{C}$-nek minden támasz téglalapja négyzet, $\mathbf{C}$ négyzetekkel burkolható.

Tatai Péter (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

II. megoldás: Elég megmutatni, hogy $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q'}$ közös $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8 = \mathbf{C}$ része tekinthető két négyzetből képezett összegtartománynak, mert minden négyzet négyzetekkel burkolható, és két négyzetekkel burkolható alakzat összege ugyancsak négyzetekkel burkolható.[1] Valóban, $\mathbf{C}$ a C_1C_2 és C_2C_3 oldalak fölé befelé szerkesztett $\mathbf{Q_1}$, ill. $\mathbf{Q_2}$ négyzetekből képezett összegtartomány. Legyen ugyanis a C_{k-1}, C_k, C_{k+1} csúcsokat paralelogrammává kiegészítő pont D_k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$, és természetesen $C_0 \equiv C_8$, $C_9 \equiv C_1$), ekkor irány és nagyság szerint $D_kC_{k+1} = C_{k-1}C_k = C_{k-2}D_{k-1}$. Másrészt $\mathbf{C}$ fönt említett forgási szimmetriája folytán irány és nagyság szerint pl. $C_1C_2 = C_6C_5$, továbbá C_1C_2 merőlegesen áll C_3C_4 és C_8C_7-re és velük egyenlő hosszú. Így $\mathbf{Q_1}$ és $\mathbf{Q_2}$ csúcsai C_1, C_2, D_3, D_8, ill. C_2 C_3, D_4, D_1. Képezzük $\mathbf{Q_1}$ és $\mathbf{Q_2}$-nek $\mathbf{C'}$ összegét a C_2 kezdőpontra vonatkozóan. Elég ebben a 4–4 csúcsból vett 16 csúcs-pár „összegét” képezni, mert $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$-vel $\mathbf{C'}$ is konvex.[2] Ezeket röviden táblázatunk tünteti fel, pl. a D_8 sorában és D_4 oszlopában álló C_6 jelentése: $\overrightarrow{C_2D_8} + \overrightarrow{C_2D_4} = \overrightarrow{C_2C_6}$. Valóban

	C_2	C_3	D_4	D_1
C_1	C_1	D_2	D_5	C_8
C_2	C_2	C_3	D_4	D_1
D_3	D_3	C_4	C_5	D_6
D_8	D_8	D_5	C_6	C_7

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_2D_8} + \overrightarrow{C_2D_4} &= (\overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1D_8}) + \\ &+ (\overrightarrow{C_2C_3} + \overrightarrow{C_3D_4}) = \\ &= (\overrightarrow{C_5C_6} + \overrightarrow{C_3C_4}) + (\overrightarrow{C_2C_3} + \overrightarrow{C_4C_5}) = \\ &= \overrightarrow{C_2C_3} + \overrightarrow{C_3C_4} + \overrightarrow{C_4C_5} + \overrightarrow{C_5C_6} = \overrightarrow{C_2C_6}.\end{aligned}$$

Összegként megkaptuk valamennyi C_k és D_k pontot. Ámde mindegyik D_k belső pontja $\mathbf{C}$-nek, mert $\mathbf{C}$ minden szöge tompaszög (a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q'}$ csúcsai körüli, lemetszett derékszögű háromszögek külső szögei), ennélfogva

$$D_kC_{k-1}C_k\sphericalangle = D_kC_{k+1}C_k\sphericalangle < 90^\circ < C_{k+2}C_{k+1}C_k\sphericalangle = C_kC_{k-1}C_{k-2}\sphericalangle.$$

Eszerint $\mathbf{C'}$ csúcsai a C_k pontok és $\mathbf{C'}$ azonos $\mathbf{C}$-vel, amit bizonyítani akartunk.

Bartha László (Balassagyarmat, Balassa B. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A $\mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \mathbf{C}$ egyenlőséget az összegtartomány szemléletes értelmezése[3] alapján is beláthatjuk. A C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6, C_7C_8 oldalra befelé írt négyzetek a forgási szimmetria folytán egybevágók, másrészt egyező állásúak, ezért egymásba eltolással is átvihetők: $\mathbf{Q_1}$ egymás utáni eltolásainak vektorai rendre $\overrightarrow{C_2C_3}$, $\overrightarrow{C_4C_5}$, $\overrightarrow{C_6C_7}$, $\overrightarrow{C_8C_1}$, és ezek éppen egyenlők $\mathbf{Q_2}$ egymás utáni oldalaival, ha ezeket vektoroknak tekintjük. Így $\mathbf{C}$ „súrolással” úgy is előáll, ha $\mathbf{Q_1}$-et végigvezetjük $\mathbf{Q_2}$ kerületén (könnyű belátni, hogy „középen” nem marad súrolatlan terület), vagy lefedéssel úgy, hogy a végtelen sok példányban vett $\mathbf{Q_1}$-ből C_2-nél fogva $\mathbf{Q_2}$-nek minden pontjára teszünk egyet.

Dániel Gábor (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

---

[1] Lásd *Kárteszi Ferenc:* Négyzetekkel burkolt konvex alakzatok, KML. XVIII. köt. 1., ill. 34 o. 1959 jan., ill. febr.

[2] Ugyanott, 33. o.

[3] Ugyanott, 6. o.