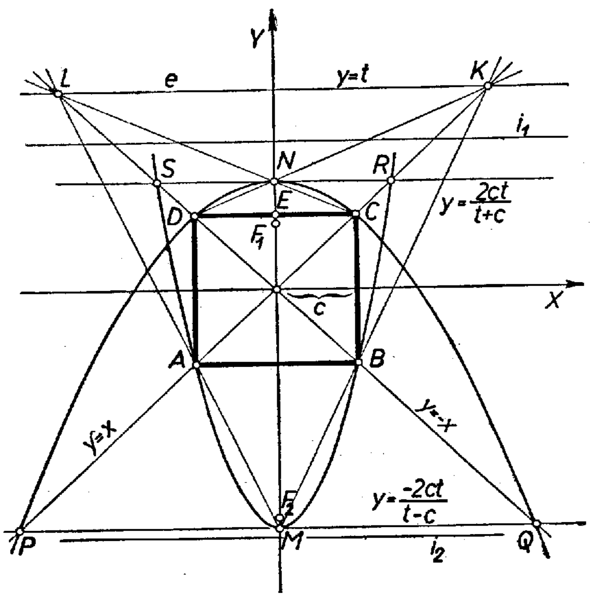
Válasszuk a négyzet középpontját koordinátarendszerünk origójának, oldalfelezőit pedig tengelyeknek úgy, hogy a négyzet csúcsai, rendre $A(-c,-c)$, $B(c,-c)$, $C(c,-c)$, $D(-c,c)$; legyen másrészt az AB oldallal párhuzamos tetszés szerinti e egyenes: $y=t$.



Az AC, ill. BD átló egyenese $y=x$, ill. $y=-x$, így $K(t,t)$, $L(-t,t)$. A szimmetriákból nyilvánvaló, hogy M és N az Y-tengelyen van. M ordinátája a BK egyenes tengelymetszeteként az $y+c=(x-c)(t+c)/(t-c)$, $x=0$ egyenletrendszerből $y=-2ct/(t-c)$, eszerint M a $t=c$, azaz $K\equiv C$ és $L\equiv D$ eset kivételével mindig létezik. N ordinátáját hasonlóan kapnók DK-ból, egyszerűbb azonban ha M ordinátájában c helyett $-c$-t írunk: $2ct/(t+c)$, ugyanis D koordinátái is így állnak elő B koordinátáiból; N a $t=-c$, vagyis $K\equiv A$ és $L\equiv B$ eset kivételével mindig létezik.

Most már K és L mintájára:

$$P\left(\frac{-2ct}{t-c},-\frac{2ct}{t-c}\right),Q\left(\frac{2ct}{t-c},-\frac{2ct}{t-c}\right);$$
$$R\left(\frac{2ct}{t+c},\frac{2ct}{t+c}\right),S\left(-\frac{2ct}{t+c},\frac{2ct}{t+c}\right).$$

A C, D, N, P, Q („első”) pont-ötös szimmetrikus az Y-tengelyre, így a kérdéses parabola tengelye is csak az Y tengely lehet, csúcsa pedig az N pont. Eszerint elég azt megmutatnunk, hogy a C, D, ill. P, Q tükrös pontpárok egyik-egyik pontja kielégít egy

$$x^2=2p_1[y-2ct/(t+c)]$$

alakú egyenletet, vagyis hogy a

$$p_1=\frac{x^2}{2\left(y-\dfrac{2ct}{t+c}\right)}$$

hányados az előjellel vett paraméterre a C, D pontpárral ugyanazt az értéket adja mint a P, Q pontpárral. Valóban, mindkét esetben $p_1=c(t+c)/2(c-t)$ adódik, – Hasonlóan az A, B, M, R, S („második”) pont-ötös is meghatároz egy parabolát melynek csúcsa M, tengelye ugyancsak az Y tengely, és előjeles paramétere:

$$p_2=\frac{x^2}{2\left(y+\dfrac{2ct}{t-c}\right)}=\frac{c^2}{2\left(-c+\dfrac{2ct}{t-c}\right)}=\frac{\left(\dfrac{2ct}{t+c}\right)^2}{2\left(\dfrac{2ct}{t+c}+\dfrac{2ct}{t-c}\right)}=\frac{c(t-c)}{2(t+c)}.$$

A fókusz a tengelyen a csúcstól mérve $p/2$ távolságban van, (a paraméter előjelét figyelembe véve), így paraboláink F_1, ill. F_2 fókuszának abszcisszája 0, ordinátája pedig:

$$\frac{2ct}{t+c}+\frac{c(t+c)}{4(c-t)}=\frac{c(c^2+10ct-7t^2)}{4(c^2-t^2)},$$
$$\text{ill.}-\frac{2ct}{t-c}+\frac{c(t-c)}{4(t+c)}=\frac{c(c^2-10ct-7t^2)}{4(t^2-c^2)}.$$

Másrészt CD felezőpontja $E(0,c)$ így a kérdéses egybeesés feltétele:

$$\frac{c(c^2+10ct-7t^2)}{4(c^2-t^2)}=c, \quad \text{ill.} \quad \frac{c(c^2-10ct-7t^2)}{4(t^2c^2)}=c$$

amiből

$$t_1=3c, \quad t_2=c/3, \quad \text{ill.} \quad t_{3,4}=\frac{-5\pm 4\sqrt{5}}{11}c\approx\left\{\begin{array}{r} c\cdot 0{,}3586, \\ -c\cdot 1{,}268, \end{array}\right.$$

vagyis négy olyan e egyenes van, amelyből egy-egy E-fókuszú parabola adódik, kettő-kettőnél F_1, ill. F_2 esik E-be. – Az első parabolán C és D rajta fekszik, így ha E fókusz, akkor $|2p|=2c$. Valóban, $t_1=3c$-vel $p_1=-c$ és $t_2=c/3$-mal $p_1=c$ adódik. Az utóbbi esetben $P\equiv C$, $Q\equiv D$, így az első parabola C, ill. D-ben érinti AC-t, BD-t.

Hahn János (Szeged, Déri M. gépip. t. III. o.t.)