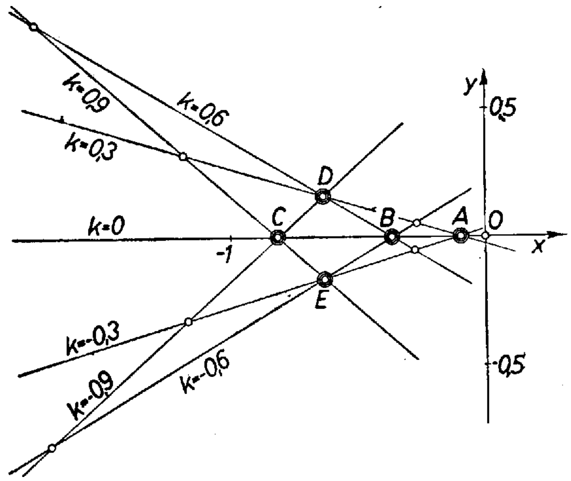
Az $y=-kx-k^3$ alakból a $-k$ iránytényező mind a hét megrajzolt egyenesre más, tehát nincsenek köztük párhuzamosak.Így mindegyik egyenesünkön 6 metszéspont várható, összesen pedig $7\cdot 6/2=21$ (felezzük a $7\cdot 6$ szorzatot, mert benne minden metszést két egyenesnél vettünk számításba). – Rajzunkon viszont csak 11 különböző metszéspontot találunk, ugyanis 5 ponton 3–3 egyenes megy át, további 6 ponton 2–2 egyenes; az előbbieket 3-szor (pl. a és b, a és c, b és c metszéseként) számítva a metszések száma $3\cdot 5+6=21$.



A rajz szerint a $k=0$-hoz tartozó $y=0$ egyenest, az X-tengelyt a $\pm 0{,}3$, $\pm 0{,}6$, $\pm 0{,}9$ k-értékpárokhoz tartozó egyenespárok ugyanazon A, ill. B, ill. C pontban metszik, továbbá egy D ponton mennek át a $k_1'=0{,}3$, $k_2'=0{,}6$, $k_3'=-0{,}9$-hez tartozó egyenesek és egy E-n a $k_1''=-0{,}3$, $k_2''=-0{,}6$, $k_3''=0{,}9$-hez tartozó egyenesek. – Valóban, bármely $\alpha\neq 0$ mellett a $k=\alpha$ és $k=-\alpha$-hoz tartozó $y=-ax-a^3$ és $y=\alpha x+\alpha^3$ egyenesek egymás tükörképei az X-tengelyre, és így egymást e tengelyen metszik, $a-\alpha^2=-(-\alpha)^2$ abszcisszájú pontban. – Vegyük észre, hogy a D-n, E-n átmenő 3–3 egyenesre $k_1'+k_2'+k_3'=k_1''+k_2''+k_3''=0$, és ugyanez áll az előző hármasokra is: $0+\alpha-\alpha=0$. Megmutatjuk, hogy ha a tetszés szerinti, páronként egymástól különböző k_1, k_2, k_3 számokra $k_1+k_2+k_3=0$, akkor a megfelelő e_1, e_2, e_3 egyenesek egy ponton mennek át. Így $k_3=-(k_1+k_2)$, és egyenleteik rendre

$$k_1x+y+k_1^3=0, \tag{1}$$

$$k_2x+y+k_2^3=0, \tag{2}$$

$$-(k_1+k_2)x+y-(k_1+k_2)^3=0.$$

(1) és (2)-ből y kiküszöbölése után e_1 és e_2M_{12} metszéspontjának x_{12} abszcisszájára, majd y_{12} ordinátájára:

$$\begin{cases} x_{12}=-\dfrac{k_1^3-k_2^3}{k_1-k_2}=-k_1^2-k_1k_2-k_2^2=-(k_1+k_2)^2+k_1k_2,\\ y_{12}=-k_1x_{12}-k_1^3=k_1^2k_2+k_1k_2^2=k_1k_2(k_1+k_2), \end{cases} \tag{3}$$

és ezek kielégítik a harmadik egyenletet, tehát a harmadik egyenes valóban átmegy az első kettő metszéspontján. Ezzel a rajzunk alapján sejtett szabályszerűséget bebizonyítottuk.

Több k-hoz tartozó egyenes berajzolása esetén nem jön létre olyan metszéspont, amelyen háromnál több egyenes megy át. Ennek bizonyítása végett megmutatjuk előbbi eredményünk fordítottját: ha (rajzunkon csak $kx+y+k^3=0$ egyenesek vannak megrajzolva és) valamely M ponton három e_1, e_2, e_3, egyenes megy át: (1), (2) és a k_3^3-hoz tartozó

$$k_3x+y+k_3^3=0, \tag{4}$$

akkor $k_1+k_2+k_3=0$. Valóban, feltevésünk azt jelenti, hogy M-ben M_{12}, és az e_1 és e_3-nak a (3) mintájára adódó $M_{13}(-k_1^2-k_1k_3-k_3^2,\ k_3^2k_3+k_1k_3^2)$ metszéspontja egybeesnek:

$$-k_1^2-k_1k_2-k_2^2=-k_1^2-k_1k_3-k_3^2$$

és

$$k_1^2k_2+k_1k_2^2=k_1^2k_3+k_1k_3^2.$$

E két egyenlőséget 0-ra redukálva

$$-k_1(k_2-k_3)-(k_2-k_3)(k_2+k_3)=(k_3-k_2)(k_1+k_2+k_3)=0$$

és

$$k_1^2(k_2-k_3)+k_1(k_2^2-k_3^3)=k_1(k_2-k_3)(k_1+k_2+k_3)=0.$$

$k_2\neq k_3$, folytán az elsőből $k_1+k_2+k_3=0$ ez a másodikból is adódik, ugyanis az indexek alkalmas választásával $k_1\neq 0$.

Ha már most M-en a k_4-hez tartozó e_4 is átmenne, akkor e_1, e_2 és e_4 közös pontja folytán $k_1+k_2+k_4=0$; és így $k_4=k_3$ tehát e_4 nem különböző e_3-tól.

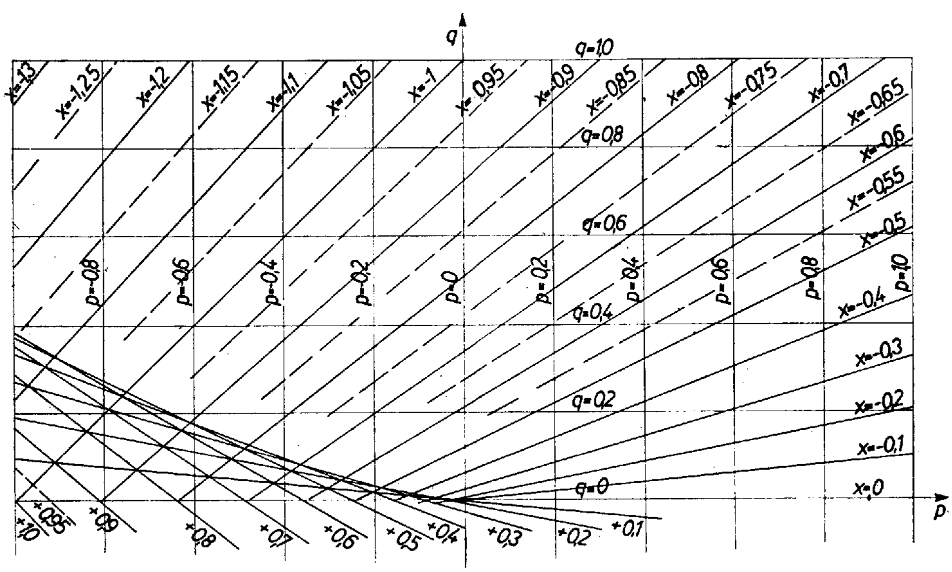
Mindezek alapján (rajz nélkül) kimondhatjuk, hogy a 21 egyenes esetében annyiszor 2 metszéspont esik egybe egy korábbival, ahányféleképpen az adott 21 számból választott három különböző szám összegeként 0-t kapunk. Ha $k_1=0$, akkor ez $k_2=\alpha$ és $k_3=-\alpha$-val 10-féleképpen lehetséges. Ha mindhárom k különbözik 0-tól, akkor kettő egyenlő jelű, a harmadik ezek összegének ellentettje. Egyszerűség kedvéért az értékek 10-szeresével dolgozva azt kell keresnünk, hányféleképpen lehet előállítani az 1, 2, ..., 10 számokat két különböző természetes szám összegeként. Ez rendre 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4-féleképpen, összesen 20-féleképpen lehetséges. (Általában $2k-1$ és $2k$-ra egyaránt $k-1$ előállítás van: $2k-1=1+(2k-2)=2+(2k-3)=\ldots=(k-1)+k$ és $2k=1+(2k-1)=2+(2k-2)=\ldots=(k-1)+(k+1)$. Ezt a számot ($-1$, -2, ..., -10-es összegek!) kétszer véve rajzunkon $10+2\cdot 20=50$ háromszoros metszés pont lenne, továbbá $21\cdot 10-3\cdot 50=60$ egyszeres, összesen 110.

Zeke András (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat 7 egyenesre vonatkozó részével azt céloztuk, hogy megoldóink „kísérleti úton”, kicsiben, olyan keretek között, amelyet még kis munkával lehet megrajzolni, *észrevegyék* a szabályszerűségeket. Ennyi tapasztalatszerzés és annak helyes megmagyarázása elegendő alap ahhoz, hogy a 21 egyenes bonyolultabb esetét már elméleti úton oldhassuk meg. Sokan azonban pontatlan vázlatból, vagy rajz nélkül indultak, a valóságot torzítva, vagy vele mit sem törődve; „róla-nélküle” írtak a kérdésről. Ne tápláljunk olyan téves nézeteket, hogy egyes esetek vizsgálata nem illő a matematikushoz. Ellenkezőleg, igen sok vizsgálat – az új kérdések kezdeti vizsgálata igen gyakran – egyes esetekből indul ki. A matematika elvonással általános tételeket állapít meg, de a semmiből nem lehet absztrahálni.

2. Tekintsük a $k^3+xk+y=0$ egyenletben k-t ismeretlennek, x, y-t együtthatóknak, így egy ún. redukált harmadfokú egyenlet áll előttünk (a köbös tag együtthatója 1, a négyzetesé 0). Gondoljuk másrészt minden valós k számhoz megrajzolva az ezen egyenlettel jellemzett egyenest. Így minden egyes k_0-hoz tartozó egyenes a rajta fekvő $(x,\,y)$ pontok koordináta párjai révén megadja az összes olyan redukált harmadfokú egyenletek $(x,\,y)$ együttható párját (x mindig az elsőfokú tag együtthatója, y az ismeretlentől mentes tag), amelyeknek a k_0 szám gyöke; és fordítva: minden egyes $(x_0,\,y_0)$ együttható párral meghatározott $(x_0,\,y_0)$ ponton átmegy minden olyan valós k-hoz tartozó egyenes, amely kielégíti az ezen együtthatókkal felírt redukált harmadfokú egyenletet. Eszerint – tudva azt, hogy minden valós együtthatós harmadfokú egyenletnek vagy egy valós gyöke van, vagy három – az utóbbi esetben közülük kettő vagy három meg is egyezhet –, kapjuk, hogy a sík minden pontján vagy egy egyenes megy át vagy három, esetleg kivételesen kettő.

Ha már most az áttekinthetőség érdekében a berajzolt egyenesek számát megfelelően csökkentjük, akkor (természetesen bízva abban, hogy pl. a kihagyott $k=0{,}537$-hez tartozó egyenes valahol a $k=0{,}5$-höz és a $k=0{,}6$-hoz tartozó egyenesek között vagy a közelükben halad) rajzunkról a redukált harmadfokú egyenletek valós gyökét (gyökeit) közelítőleg leolvashatjuk. Ábránk a redukált harmadfokú egyenlet valós gyökeinek közelítő leolvasására szolgáló *vonalsereges* (egyenessereges) *nomogram.* [1] A redukált harmadfokú egyenletet az $x^3+px+q==0$ általános alakban szokás írni, ezért ábránk tengelyeit is p, q-val jelöltük, az eddigi k helyére pedig x lép.



Pl. az $x^3-0{,}73+0{,}072=0$ egyenlet gyökei a rajz szerint, amennyire a $(-0{,}73;\ 0{,}072)$ pont a rajzon felismerhető, $x_1=-0{,}9$, $x_2=0{,}1$, $x_3=0{,}8$, mert az említett ponton átmenő három egyenesen a $(k=)x=-0{,}9$, ill. 0,1, ill. 0,8 jelzés olvasható (ellenőrizzük a gyököket!). – Az $f(x)=x^3+0{,}8x+0{,}8=0$ egyenlet (egyetlen) valós gyöke közelítőleg $x_1\approx -0{,}65$; ellenőrzés: $f(-0{,}65)\approx +0{,}003$. – A rajzról vett közelítő értékek alapján a gyökök pontosabb közelítő értékét szükség esetén számítással szokás képezni (a gyököt „kifinomítani”).

[1] Lásd pl. *Pálmai Lóránt:* Egyszerű nomogramok. KML. XIII. kötet, 65–74. o. (1956: november).

Bár ábránkon a p, q koordináta-rendszernek csak a $-1 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ téglalapja látható, róla az alábbi példák mintájára mégis minden (valós együtthatós) redukált harmadfokú egyenlet gyökeiről tájékozódhatunk, első értékes jegyét leolvashatjuk és a másodikat megbecsülhetjük. A $g(x) = x^3 + 0{,}5x - 0{,}5 = 0$ egyenlet minden gyöke -1-szer akkora, mint a $(-z)^3 + 0{,}5(-z) - 0{,}5 = 0$, másképpen $z^3 + 0{,}5z + 0{,}5 = 0$ egyenlet egyik gyöke; az utóbbinak egyetlen valós gyöke a rajzról $z \approx -0{,}59$, ezért $g(x) = 0$ egyetlen valós gyöke $z \approx 0{,}59$; valóban $g(0{,}59) \approx +0{,}0004$. – A $h(x) = x^3 - 48x + 130 = 0$ egyenletből $x = 10u$ helyettesítéssel $u^3 - 0{,}48u + 0{,}13 = 0$-hoz $u_1 \approx -0{,}8$, $u_2 \approx 0{,}4$ tehát $x_1 \approx -8$, $x_2 \approx 4$; ellenőrzés: $h(-8) = +2$, $h(4) = +2$.

Itt indokolás nélkül megjegyezzük a következőket: a $(-0{,}48;\ 0{,}13)$ pont közelében csak két egyenest látunk, de tudjuk, hogy $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, tehát $u_3 \approx +0{,}4$, $x_3 \approx 4$ (kétszeres gyök). Ilyenkor valós kétszeres gyök helyett olyan konjugált komplex gyökpár is lehetséges, amelyben a képzetes rész „kicsi”. Valóban, pontosabb számítással $x_1 \approx 8{,}01386$, és az x_1 leválasztásával adódó $x^2 - 8{,}01386x + 16{,}2219 = 0$ egyenletből (amelynek együtthatói 1, x_1 és $130/x_1$) számítással $x_{2,3} \approx +4{,}00793 \pm i0{,}4079$. – Ilyen „veszély” akkor és csak akkor áll fenn, ha a $(p,\,q)$ ponthoz közel eső egyenesekről leolvasott x-ek aránya közel -2; vagy szemléletesen: ha a $(p,\,q)$ pont közel van a nomogram vonalakkal „sűrűn”, ill. „ritkán” átjárt részeinek jól látható határához.

Hasonlóan $x^3 - 4{,}8 \cdot 10^{-5}x - 1{,}3 \cdot 10^{-7} = 0$-ból $100x = w$ közvetítéssel $w^3 - 0{,}48w - 0{,}13 = 0$ és $x_1 \approx 8{,}013\,86 \cdot 10^{-3}$ és $x_{2,3} \approx (4{,}008 \pm i0{,}408) \cdot 10^{-3}$. „Túl kicsi” együtthatók esetén a leolvasást eszerint tehetjük pontosabbá. – Olvassunk le közelítő értéket még az $x^3 + 500x - 1{,}3 = 0$, és az $x^2 - 0{,}72x + 53{,}8 = 0$ egyenlet gyökeire is!