I. megoldás: Legyenek sorozatunk tagjai: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, különbségi sorozatának tagjai $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$, ahol $d_k = a_{k+1} - a_k$. Ennek első kilenc tagja: 8, 6, 16, 10, 24, 14, 32, 18, 40. Mindegyik páros indexű különbség kisebb az előtte álló tagnál, és (d_1-et nem tekintve) mindegyik páratlan indexű nagyobb az előtte állónál, mert az ún. második különbségi sorozatban ($e_k = d_{k+1} - d_k$), $a - 2$, 10, -6, 14, -10, 18, -14, 22 tagok váltakozó előjelűek.

Erre támaszkodva tegyünk külön-külön próbát az eredeti sorozat páratlan és páros indexű tagjaival. Ezeket a', a''-vel, a különbségi sorozatok tagjait d', d'', e', e''-vel jelölve:

$$\begin{array}{lccccccccc|lccccccccc}
a': & 2, & & 16, & & 42, & & 80, & & 130 & a'': & 10, & & 32, & & 66, & & 112, & & 170 \\
d': & & 14, & & 26, & & 38, & & 50, & & d'': & & 22, & & 34, & & 46, & & 58 & \\
e': & & & 12, & & 12, & & 12 & & & e'': & & & 12, & & 12, & & 12, & &
\end{array}$$

e' és e'' állandók, ezért a d', d'' tagok számtani sorozatok. Tegyük fel, hogy ez a szabályszerűség bármely sorszámú tagra fennáll. Eszerint:

$$\begin{aligned}
a'_k = a_{2k-1} = a'_1 + (d'_1 + d'_2 + \ldots + d'_{k-1}) = a'_1 + \frac{k-1}{2}\left[2d'_1 + (k-2)e'_1\right] = \\
= 2 + \frac{k-1}{2}\left[28 + 12(k-2)\right] = 6k^2 - 4k, \\
a''_k = a_{2k} = a''_1 + (d''_1 + d''_2 + \ldots + d''_{k-1}) = a''_1 + \frac{k-1}{2}\left[2d''_1 + (k-2)e''_1\right] = \\
= 10 + \frac{k-1}{2}\left[44 + 12(k-2)\right] = 6k^2 + 4k,
\end{aligned}$$

páratlan, ill. páros n esetére $k = (n+1)/2$-t, ill. $k = n/2$-t írva:

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad a_n = \frac{3n^2 + 4n}{2},$$

és a 954. feladatban[1] használt elvvel

$$a_n = \frac{3n^2 + \left[3 + (-1)^n\right]n}{2} - \frac{1 - (-1)^n}{4} = \frac{1}{4}\left[6n^2 + 6n - 1 + (2n+1)(-1)^n\right].$$

Kovács Margit (Szombathely, Savaria g. III. o. t.)

Megjegyzés: Az $a_{2k-1} = 6k^2 - 4k$, $a_{2k} = 6k^2 + 4k$ képletek a következő szabályszerűségekből, illetve fennmaradásuk megköveteléséből is kiadódnak:

$$\begin{array}{lll}
a_2 + a_1 = 12 = 12 \cdot 1^2 & a_4 + a_3 = 48 = 12 \cdot 2^2 & a_6 + a_5 = 108 = 12 \cdot 3^2 \\
a_2 - a_1 = \ \ 8 = \ \ 8 \cdot 1 & a_4 - a_3 = 16 = \ \ 8 \cdot 2 & a_6 - a_5 = \ \ 24 = \ \ 8 \cdot 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a_8 + a_7 = 192 = 12 \cdot 4^2 & a_{10} + a_9 = 300 = 12 \cdot 5^2 \\
a_8 - a_7 = \ \ 32 = \ \ 8 \cdot 4 & a_{10} - a_9 = \ \ 40 = \ \ 8 \cdot 5,
\end{array}$$

így vehetjük a továbbképezés szabályának a következőt:

$a_{2k} + a_{2k-1} = 12k^2$, $a_{2k} - a_{2k-1} = 8k$, és ezekből mint egyenletrendszerből adódik a_{2k} és a_{2k-1}.

II. megoldás: A (kettéosztatlan) sorozat d_k különbségi sorozata hasonló szerkezetű a 954. feladatban látott sorozathoz:

$$\begin{aligned}
d_{2k-1} = 8 + 8(k-1) = 8k, \quad d_n = 4n + 4, \quad \text{ha} \quad n \quad \text{páratlan}, \\
d_{2k} = 6 + 4(k-1) = 4k + 2, \quad d_n = 2n + 2, \quad \text{ha} \quad n \quad \text{páros}.
\end{aligned}$$

Az $a_{n+1} = a_1 + (d_1 + d_2 + \ldots + d_n)$ kifejezése céljára írjuk fel a d-sorozat n tagjának összegét is a 954. feladat mintájára

$$S_{2k} = S'_k + S''_k = \frac{k}{2}\left(8 + d_{2k-1} + 6 + d_{2k}\right) = \frac{k}{2}(16 + 12k) = 6k^2 + 8k,$$

$S_{2k-1} = S_{2k} - d_{2k} = 6k^2 + 4k - 2$, azaz

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{3n^2 + 8n}{2}, & \text{ha} \quad n \quad \text{páros}, \\ \dfrac{3n^2 + 10n + 3}{2}, & \text{ha} \quad n \quad \text{páratlan}. \end{cases}$$

[1]Lásd ezen számban, 106. o.

Összefoglalva: n bármely pozitív egész értékére.

$$S_n = \frac{1}{4}\left[6n^2 + 18n + 3 - (2n+3)(-1)^n\right],$$

és így:

$$a_{n+1} = 2 + S_n = \frac{1}{4}\left[6n^2 + 18n + 11 - (2n+3)(-1)^n\right],$$

végül n helyett $n-1$-et, $(-1)^n$ helyére $(-1)^{n-1} = -(-1)^n$-et írva

$$a_n = \frac{1}{4}\left[6(n-1)^2 + 18(n-1) + 11 - (2n+1)(-1)^{n-1}\right] = \frac{1}{4}\left[6n^2 + 6n - 1 + (2n+1)(-1)^n\right].$$

Bürger Nándor (Budapest, József A. g. III. o. t.)