

I. megoldás: Tegyük fel – a bizonyítandó állítással ellentétben –, hogy egy az $N = \overline{abc}$ szám jegyeiből felcseréléssel képezett N' szám többszöröse N -nek: $N' = kN$, ahol k egész szám. Tekintsük a $D = N' - N = (k - 1)N$ számot; megmutatjuk, hogy ez osztható 9-cel: $D = 9M$, ahol M egész. Ugyanis $N = 100a + 10b + c = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$, és $N' = a \cdot 10^\alpha + b \cdot 10^\beta + c \cdot 10^\gamma$, ahol α, β, γ a 0, 1, 2 kitevőket jelentik valamely sorrendben, tehát $D = a(10^\alpha - 10^2) + b(10^\beta - 10^1) + c(10^\gamma - 10^0)$, és itt mind a három tag osztható $10 - 1 = 9$ -cel, mert a különbség vagy 0, vagy 10 egy alkalmas hatványát kiemelve egy $\pm(10^\delta - 1)$, $\delta \geq 1$ alakú tényező marad, ami osztható 9-cel. Másrészt, a kisebbítendőt növelve, a kivonandót csökkentve $D = N' - N < 1000 - 100 = 900$; eszerint $M = D/9 < 100$, vagyis M legfeljebb kétjegyű szám.

Most már a $(D =) 9M = (k - 1)N$ egyenlőség világosan mutatja, hogy ellentmondásra jutottunk: a bal oldalnak legfeljebb kétjegyű törzsszám-osztója lehet, a jobb oldalnak pedig van háromjegyű törzsszám osztója: az N szám. – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Tomcsányi Gyula (Budapest, Toldy F. g. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Nem mondtuk ki, de nyilvánvaló, hogy $k > 1$, vagyis azt bizonyítottuk, hogy N a N' -nek *valódi* (N' -nél kisebb) *osztója* nem lehet. Számos dolgozat kizárta a vizsgálatból az \overline{aac} , \overline{aba} , \overline{abb} alakú törzsszámokat, amilyenek pl. 331, 313, 311 (\overline{aaa} alakú törzsszám nincs, mert $111 = 3 \cdot 37$). Ez nem célszerű, mert az $N' > N$ feltevésével a tétel az egyenlő jegyeket is tartalmazó törzsszámokra is érvényes; már pedig a háromjegyű törzsszámoknak közel a harmadában két jegy egyenlő.

2. Az is ellentmondás, hogy a bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal pedig *nem*, mert N törzsszám, $k - 1$ pedig az 1, 2, ..., 8 számok valamelyike, hiszen $k < 10$, mert $k = 10$ -zel $N' = 10N = \overline{abc0}$ négyjegyű szám lenne. – Ez mutatja, hogy az állítás minden 3-mal nem osztható összetett számra is érvényes, akárhány jeggyel van is leírva.

Pósa Lajos (Budapest XIII., Sziget utcai ált. isk. V. o. t.)

3. Az állítás az $N' \neq N$ megszorítással a törzsszámoknak bármely számrendszerben felírt alakjára érvényes, hacsak az illető rendszerben többjegyűek (egyjegyű számban viszont nincs értelme a jegyek felcserélésének). Legyen ugyanis az alapszám B (bázis), így a fentiekhez hasonlóan $D = (B - 1)M = (k - 1)N$, és itt N több jeggyel van írva az egyjegyű $B - 1$ -nél is, M -nél is. Valóban, N jegyeinek számát j -vel jelölve $B^{j-1} \leq N$, $N' < B^j$, így $D = (B - 1)M < B^j - B^{j-1} = B^{j-1}(B - 1)$, tehát $M < B^{j-1}$ (mert $B \neq 1$, és így $B - 1 \neq 0$), már pedig B^{j-1} a B -alapú számrendszer legkisebb j -jegyű száma. – Érvényes az állítás minden a $B - 1$ -hez relatív prím nem-törzsszám N -re is.

4. Számos dolgozat az $N' = \overline{acb}$, \overline{bac} , \overline{bca} , \overline{cab} , \overline{cba} számokról külön-külön mutatta meg, hogy a velük képezett $N' - N$ különbségnek nem lehet háromjegyű törzsszám-osztója. Az ilyen dolgozatok hosszadalmasak, és rendszerint mégis hiányosak.

II. megoldás: Az $N' = kN$ feltevés lehetetlenségét az is mutatja, hogy sorra véve a k -ként szóbjövő 2, 3, ..., 9 értékeket, valamennyi ellentmondásra vezet. N prím, tehát nem osztható 3-mal, így jegyeinek összege sem, ez az összeg N' -re ugyanaz, ezért N' sem osztható 3-mal, tehát k nem lehet 3, 6, 9. Lehetetlen $k = 2, 5, 8$ is, mert ha $N = 3C + 1$, akkor ezekkel $N' = kN$ a $3E + 2$ alakban írható, ha pedig $N = 3C + 2$, akkor $N' = 3E + 1$, így N és N' -ben a jegyek összege – ami 3-mal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint maga a szám – nem lehetne egyenlő.

$k = 4$ mellett N' utolsó jegye, vagyis N egyik jegye páros volna, másrészt $N < 250$, így első jegye 1, vagy 2. Az első esetben $a = 1$, páratlan, s mivel c is páratlan, mert N prím, azért N páros jegye b . Eszerint $N' = \overline{cab}$, és így az $N' = 4N$ feltevésből:

$$100c + 10a + b = 400a + 40b + 4c, \quad \text{azaz} \quad 96c = 3 \cdot 13(10a + b),$$

és ez lehetetlen, mert a bal oldal nem osztható 13-mal. – Ha pedig $a = 2$, akkor b legfeljebb 4, és N' első jegye legalább 8. Ez csak c lehet, c viszont páratlan, tehát $c = 9$. Így $4N = N'$ -nek utolsó jegye 6, ilyen pedig N -ben nincs.

Végül $k = 7$ mellett $N < 1000/7 < 143$, így $a = 1$ és $b \leq 4$, ezért N' első jegye legalább 7, tehát $c = 7$, vagy 9. Az első esetben $N' = 7N$ -nek utolsó jegye 9, ezt a és b korlátozott értékei nem adhatják; $c = 9$ esetén pedig $7N$ utolsó jegye 3, így $N = 139$ lenne, de $7N = 973$ nem az N jegyeiből áll.

Ezzel k minden szóbjövő értékét kizártuk, feltevésünk lehetetlennek bizonyult.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)