Vegyük észre, hogy S egymás utáni tagjaiban az együttható rendre az első 1, 2, 3, 4, …, n természetes szám összege:

$$3=1+2,\quad 6=1+2+3,\quad \ldots,\quad n(n+1)/2=1+2+\ldots+n.$$

Eszerint S így írható:

$$\begin{aligned}S=&\,x+\\ &+x^2+2x^2+\\ &+x^3+2x^3+3x^3+\\ &+x^4+2x^4+3x^4+4x^4+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+x^n+2x^n+3x^n+4x^n+\ldots+nx^n.\end{aligned}$$

Itt az oszlopok száma n, és minden oszlop egy-egy mértani sor, rendre n, $n-1$, $n-2$, …, 1 taggal. A hányados mindenütt: $x\neq 1$, tehát alkalmazhatjuk a sor összeg-képletét:

$$\begin{aligned}S&=\frac{x(x^n-1)}{x-1}+\frac{2x^2(x^{n-1}-1)}{x-1}+\frac{3x^3(x^{n-2}-1)}{x-1}+\ldots+\frac{nx^n(x-1)}{x-1}=\\ &=\frac{x}{x-1}\left[(x^n+2x^n-3x^n+\ldots nx^n)-(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1})\right].\end{aligned}$$

A zárójel első része $n(n+1)\,x^n/2$, a levonandó S' összeg pedig az előbbihez hasonlóan alakítható:

$$\begin{aligned}S'=&\,1+\\ &+x+x+\\ &+x^2+x^2+x^2+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}=\\ =&\,\frac{x^n-1}{x-1}+\frac{x(x^{n-1}-1)}{x-1}+\ldots+\frac{x^{n-1}(x-1)}{x-1}=\\ =&\,\frac{1}{x-1}\left[nx^n-(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})\right]=\frac{1}{x-1}\left[nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}\right]=\\ =&\,\frac{nx^n}{x-1}-\frac{(x^n-1)}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Így az eredeti kifejezés:

$$S=\frac{n(n+1)\,x^{n+1}}{2(x-1)}-\frac{nx^{n+1}}{(x-1)^2}+\frac{x(x^n-1)}{(x-1)^3}.$$

Halász Ákos (Kecskemét, Piarista g. IV. o. t.)