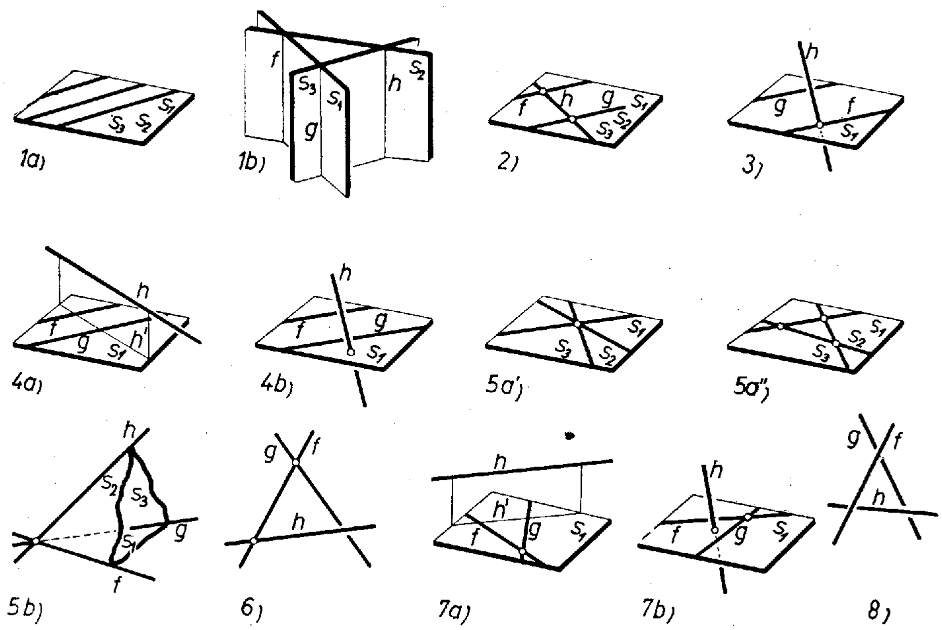
Felsorolásainkat olyan elv szerint kell szerkesztenünk, amely biztosítja, hogy egyetlen, minőségileg a felsorolandóktól eltérő lehetőség se maradjon ki. Mindegyik rész-kérdésben három térelemet (egyenest vagy síkot, vegyesen is) kell vizsgálnunk. Ezek kölcsönös helyzetének jellemzésére három egyszerűbb kapcsolatot kell megadnunk: a belőlük képezhető három pár kölcsönös helyzetét. E célra áttekintjük az elem-párokra fennálló lehetőségeket. Két (különböző) egyenes egymáshoz képest párhuzamos (rövidítve: p), metsző (m) és kitérő (k) lehet. A lehetőségek p, m, k felsorolásában már azt a „rangsort" követtük, amely szerint a lehetőségeket majd rendszerezzük. Célszerű ugyanis p és m-et különleges, figyelmet érdemlő szempontnak venni, továbbá közülük (a síkbeli lehetőségek rangsorolásával) p-t választani elsőnek. p és m esetén a két egyenes meghatároz egy síkot, továbbá m esetén még egy pontot is (másodlagos, közvetve adott elemek), a harmadik térelemnek ehhez képest mutatkozó helyzetét további szempontként célszerű figyelembe venni, mert feltűnő minőségi különbségek mutatkozhatnak.

Egy f egyenes és egy S sík illeszkedő (i, azaz f benne van S-ben, másképpen: S átmegy f-en), párhuzamos és metsző helyzetben lehet, az m esetben meghatároznak egy pontot két sík pedig p és m helyzetű lehet, az m esetben meghatároznak egy egyenest. (Két vagy három p, vagy m egyenespárból származtatott, másodlagos síkkal kapcsolatban azonban az egybeesés (e) lehetőségét is tekintetbe kell vennünk, hasonlóan az adódott M metszéspontok egybeeső vagy különböző voltát is.)

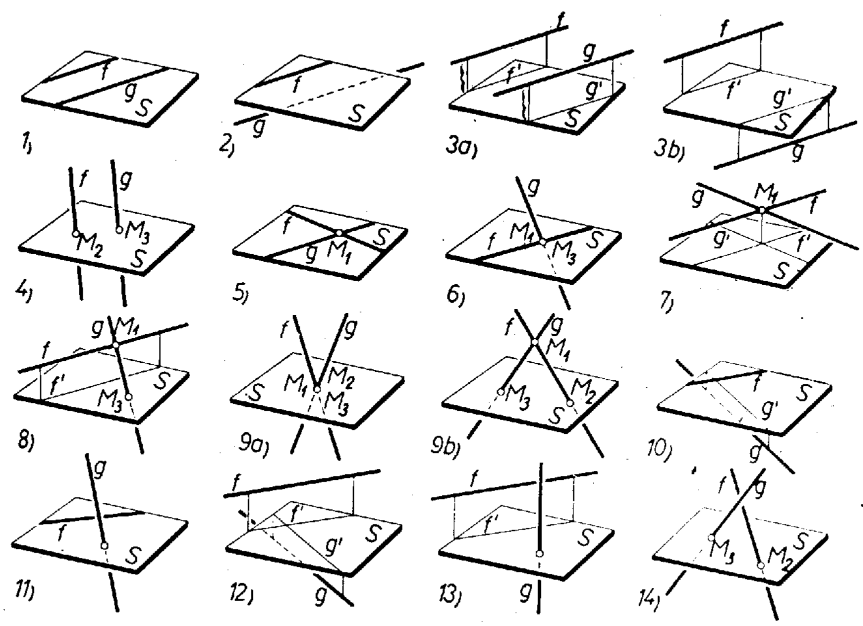


A helyzeteket elsősorban a megfelelő három betűvel jellemezzük, és ezt esetleg kiegészítjük a másodlagos elemekre vonatkozóan. A felsorolásokban a névsorszerkesztés elveit követjük, rövidítéseink említett rangsora szerint. Tulajdonképpen ezek a betűkombinációk vezetnek abban, hogy mely lehetőségeket kell egyáltalán megvizsgálnunk, ugyanis előkészítésül *formálisan* (a térbeli tartalomra való tekintet nélkül) kiszámítjuk a megvizsgálandó helyzeti (azaz betű-) kombinációk számát, és felírásuk után vizsgáljuk *tartalmi szempontból*, hogy valóban lehetséges térbeli helyzeteket jelentenek-e.

a) Legyenek az adott egyenesek f, g, h (ezek egyenrangúak, a betűkombinációból az előbb álló betűt az előbb álló egyenespárra vonatkoztatjuk). A p, m, k rövidítésekből 10 betűkombináció lehetséges [1] közülük 8-nak létezik a térbeli megfelelője: 1) p, p, p (vagyis $f//g$, $f//h$ és $g//h$); 2) p, m, m; 3) p, m, k; 4) p, k, k; 5) m, m, m; 6) m, m, k; 7) m, k, k; 8) k, k, k. (A p, p, m és p, p, k kombinációk tartalmi szempontból lehetetlenek, mert ha $f//g$ és $f//h$, akkor $g//h$, tehát p, p után sem m, sem k nem állhat.)

Az 1), 2) és 5) esetek jelölésében 3–3 p vagy m betű áll, vagyis az egyenespárokból 3 jól látható sík származik; jelöljük ezeket s_1, s_2, s_3-mal. Ezek a 2) esetben szükségképpen egybeesők, mert ha h az egymással párhuzamos f és g mindegyikét metszi, akkor benne fekszik s_1 síkjukban.

[1] 3-tagú (3-ad osztályú) ismétléses kombinációk 3-féle elemből, számuk $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$; természetesen e képlet nélkül is felsorolhatók.



Az 1) és 5) esetben a három sík közül vagy bármelyik kettő (tehát ismét mind a három) egybeesik, vagy egyik pár sem (az 1. ábrán[2] $1a$, $5a'$ és $5a''$, ill. $1b$, $5b$). A 3) és 6) esetek 2–2 származtatott síkja csak m helyzetű lehet, különben nem állhatna a harmadik helyen k betű. Végül a 4) és 7) esetekben a h egyenes p vagy m lehet s_1-hez (ez azonban a kitérőségek miatt már nem annyira feltűnő különlegesség, csak a teljesség kedvéért említjük). – A metszéspontok változatai: az 5) eset három metszéspontja közül is vagy mind a három pár (azaz mind a három pont) egybeesik ($5a'$), vagy egyik sem ($5a''$). A 2) és 6) eset két metszéspontja csak különböző lehet, különben nem állhatna velük együtt p, ill. k betű. Ezekkel a „finomításokkal” a lehetőségek száma 13-ra emelkedik.

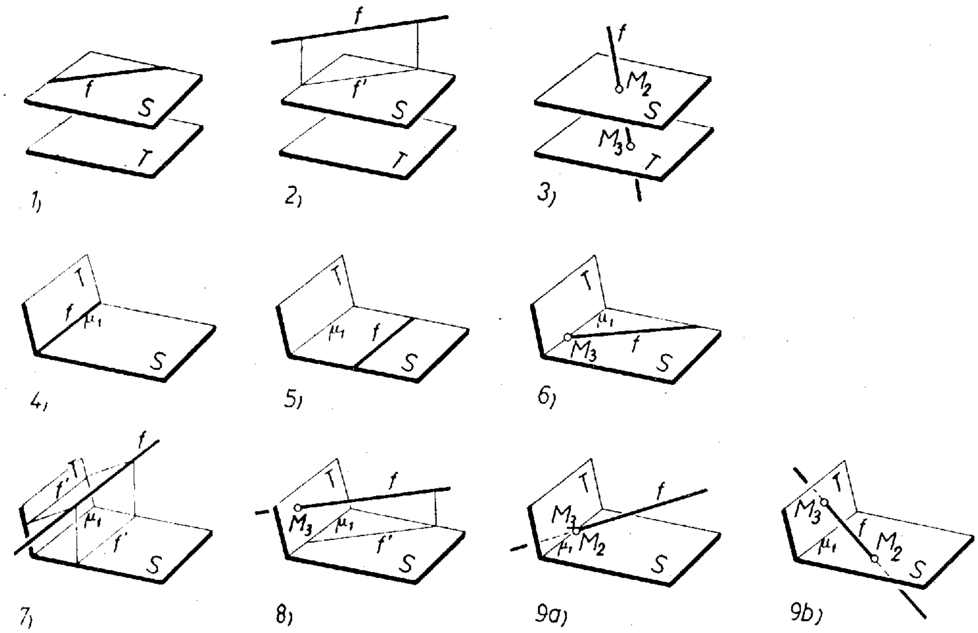
b) Legyenek az egyenesek f és g, és a sík S, kölcsönös helyzeteiket f, g; f, S; g, S sorrendben soroljuk fel. A jellemző betűhármas első tagja ismét 3-féle lehet, további két tagja pedig i, p, vagy m, ezek összeállítására 6 lehetőség van: 3 „tiszta” pár (egyenlő betűkből) és 3 „vegyes” (rangsorba szedve), így $3\cdot 6=18$ lehetőségre kell gondolnunk. Ezek közül 4 lehetetlen: k, i, i (mert ha f is, g is benne fekszik S-ben, akkor nem lehetnek kitérők); m, i, p; p, i, m és p, p, m (indokolásuk esetről-esetre a tartalom szerint végezhető). A fennmaradó 14 betűhármashoz valóban tartozik térbeli f, g, S helyzet: Felsorolásukon az f, g-vel esetleg meghatározott s_1 síknak S-hez viszonyított helyzetét is feltüntetjük, úgyszintén az esetleges M_1, M_2, M_3 metszéspontokét is, ahol legalább két ilyen van. Ezekből a 3) és 9) esetekben adódik két változat, így a megkülönböztetett kölcsönös helyzetek száma $18-4+2=16$.

	f,g	f,S	g,S	s_1,S	M-ek
1)	p	i	i	e	
2)	p	i	p	m	
3a)	p	p	p	p	
3b)	p	p	p	m	
4)	p	m	m	m	$M_2\not\equiv M_3$
5)	m,	i,	i	e	
6)	m,	i,	m	m	$M_1\equiv M_2$
7)	m,	p,	p	p	
8)	m,	p,	m	m	$M_1\equiv M_3$
9a)	m,	m,	m	m	egybeesnek
9b)	m,	m,	m	m	különbözők
10)	k,	i,	p		
11)	k,	i,	m		
12)	k,	p,	p		
13)	k,	p,	m		
14)	k,	m,	m		$M_2\not\equiv M_3$

c) Legyen az adott egyenes f, a síkok S, T; a felsorolás sorrendje: S, T; f, S; f, T. Itt az utolsó két betűre van 6 kombinációs lehetőség, az elsőre $2:p$ és m, így 12 vizsgálatot kell végeznünk. Közülük 3 lehetetlen: p, i, i; p, i, m, és p, p, m. További szempontok: S és T esetleges metszésvonalának μ_1-nek f-hez képest való helyzete, továbbá f és S, valamint f és T esetleges M_2, M_3 metszéspontjának kölcsönös helyzete; mindkettő a 9) esetben ad két változatot, éspedig ugyanazt a kettőt, a megkülönböztetett lehetőségek száma: $12-3+1=10$.

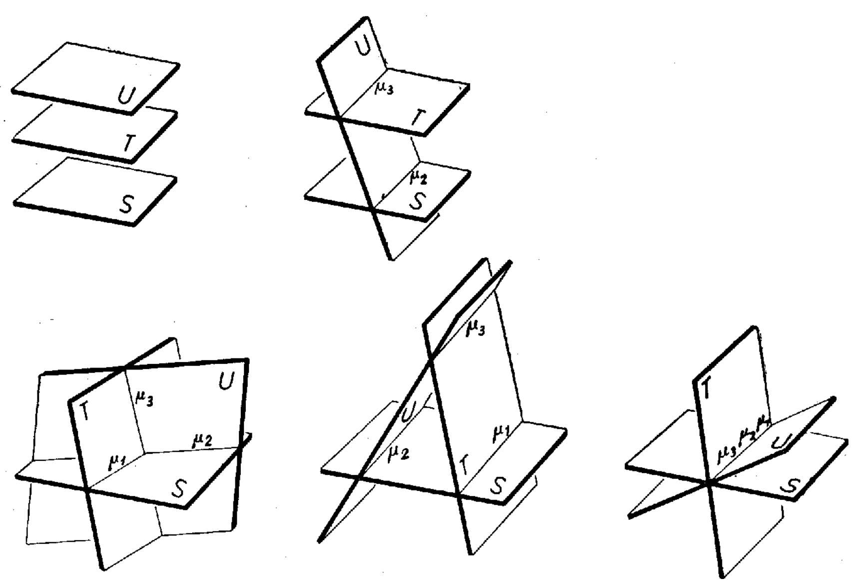
	S,T	f,S	f,T	μ_1,f	M-ek
1)	p	i	p		
2)	p	p	p		
3)	p	m	m		$M_2\not\equiv M_3$
4)	m,	i,	i	e	
5)	m,	i,	p	p	
6)	m,	i,	m	m	
7)	m,	p,	p	p	
8)	m,	p,	m	k	
9a)	m,	m,	m	m	$M_2\equiv M_3$
9b)	m,	m,	m	k	$M_2\not\equiv M_3$

[2] Az ábrákon a fehér köröcskék egyenesek, vagy egyenes és sík (másodlagos sík) metszéspontját jelölik; láthatósági viszonyokat is jelzünk, sík és egyenes párhuzamosságának érzékeltetésére az egyenesnek a síkon való vetületét is jelezzük.



d) Legyenek a síkok: S, T, U. Páronként a p és m lehetőségről lehet szó, a három párra pedig 4 betűkombinációról. Közülük a p, p, m lehetetlen, az m, m, m esetben viszont a μ_1, μ_2, μ_3 metszésvonalak kölcsönös helyzetére három lehetőség van: feladatunk *a)* részének 1b, 5b esete, továbbá mindhárom μ egybeesése; ennélfogva 5 lehetőség van.

	S,T	S,U	T,U	$\mu-k$
1)	p	p	p	
2)	p	m	m	$\mu_2//\mu_3$
3a)	m	m	m	$\mu_1\equiv\mu_2\equiv\mu_3$
3b)	m	m	m	$\mu_1//\mu_2//\mu_3$ *a)* rész 1b)
3c)	m	m	m	egy közös pontjuk van, *a)* rész 5b)



Ezzel a felsorolásokat befejeztük.

Mezei Ferenc (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)