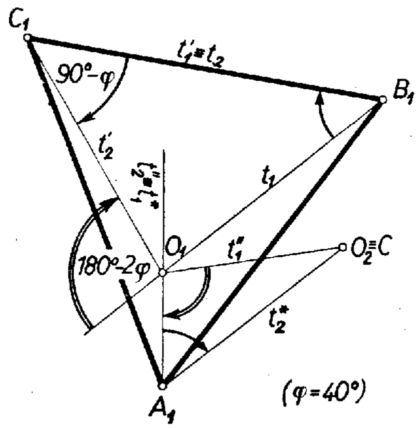
I. megoldás (csak a szerkesztés) Feladatunknak az 1958. évi Arany Dániel verseny haladó csoport II. fordulóján kitűzött 3. feladat[1] speciális esete, ott $\varphi = 60°$. Másrészt $\varphi = 30°$ esetén az ABC háromszöghöz megszerkesztett A_1, B_1, C_1, pontokkal az $AC_1BA_1CB_1$ hatszögre teljesülnek az 1956. évi Arany Dániel verseny haladó csoport II. fordulója 3. feladatának[2] feltételei (2 – 2 szomszédos oldal egyenlő, az egyenlő szomszédos oldalak közti szögek 120°-osak), így az ott bebizonyított tétel szerint az $A_1B_1C_1$ háromszög szabályos; ezért adott A_1, B_1, C_1-ből vagy egyáltalán nem szerkeszthető ABC, vagy számtalan sok szerkeszthető. A $\varphi = 30°$ esetet ezért kizárjuk.

Az 1958. évi versenyfeladatra közölt II. megoldás gondolatmenetét átvéve megoldást kapunk, ha az ottani forgatások szögét, ill. a tükörtengelyek közti szöget az alábbiak szerint módosítjuk.



A C csúcsnak B_1, majd C_1 végül A_1 (C-t A-ba, majd B-be, végül C-be vivő) forgatásai $180° - 2\varphi$ szöggel végzendők az $A_1B_1C_1 = H_1$ háromszög körüljárásával ellentétes irányban (mert ott az 1. (és 5.) ábrán $ABC = H$ és H_1 körüljárása pozitív, CAB_1, ABC_1, BCA_1,-é viszont negatív); minden további forgás is így értendő. Ezért az 5. ábra t_1-et t_2-be, t_1'-et t_2'-be és t_1^*-et t_2^*-be vivő forgásainak szöge $90° - \varphi$, a t_1-et t_2'-be és t_1''-et t_2''-be vivő, O_1 körüli forgások szöge $180° - 2\varphi$, végül a t_1''-et t_2^*-be vivő forgási $\varepsilon = 270° - 3\varphi$. Az O_2 körüli ε forgással ismét csak O_2, kerül eredeti helyére (ott marad), tehát $C \equiv O_2$.

Mivel $0° < \varphi < 90°$, azért O_1 mindig létezik; ugyanígy O_2 is, hacsaknem t_1'' és t_2^* párhuzamosak vagy egybeesők. Ez csak akkor állhatna be, ha $180° - 2\varphi$ és $90° - \varphi$ kiegészítő szögek (a kizárt $\varphi = 30°$ esete), ill. $\varphi = 90°$ mellett, amikor a föléirt háromszögek értelmüket vesztik. Így ABC megszerkesztése mindig egyértelműen elvégezhető, tehát ha van, akkor egy megoldás van.

Czékus Laborc (Budapest, Toldy F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. O_1A_1 a BC szakasz felező merőlegese, mert az idézett megoldás szerint B és C az O_1 és A_1 pontok mindegyike körüli forgással egymásba vihetők át, tehát egyenlő távolságra vannak O_1-től és A_1-től. Így O_1A_1 a CBA_1 háromszög tengelye, megszerkeszthetők a hozzá $90° - \varphi$ szöggel hajló A_1B és A_1C száregyenesek, és közülük az veendő A_1C-nek, amelyet a H_1 körüljárásával egyező irányú, $180° - 2\varphi$ szögű forgás visz át a másikba. Így kaphatjuk B_1C, B_1A, C_1A, C_1B-t is, és a megfelelő metszéspontok adják H csúcsait.

2. Megkaphatjuk H-t hasonlósági transzformációval is abból, hogy BC iránya merőleges O_1A_1-re, és ugyanígy CA, AB irányát megszerkesztve akárhány a H-hoz hasonló helyzetű H^* háromszöget kaphatunk. Egy ilyenhez megszerkesztve a megfelelő A_1^*, B_1^*, C_1^* csúcsokat, a nyert H_1^* háromszög nyilván ugyancsak hasonló helyzetű H_1-hez. H_1^* és H_1-nek S hasonlósági pontjából mint középpontból H^* megfelelő nyújtásával kapjuk H-t.

3. A szerkesztés a fentiek szerint akkor is elvégezhető, ha a kívánt egyenlő szárú háromszögek alapján fekvő φ, ψ, ω szögeknek egymástól különbözőknek kell lenniük.

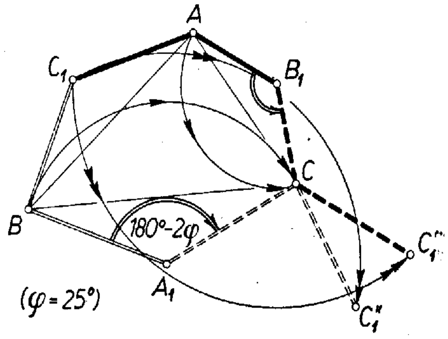
Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás: Szerkesszük meg a pozitív körüljárású $ABC = H$ háromszöghöz a C_1, A_1, B_1 pontokat (a H_1 háromszöget) és forgassuk el egyrészt a B_1AC_1, háromszöget B_1 körül, másrészt az A_1BC_1 háromszöget A_1 körül úgy, hogy A, ill. B csúcsuk C-be jusson.

---

[1]Lásd a megoldást KML. XVII. kötet 76–79. o. és *Lőrincz Pál* hozzáfűzött megjegyzéseit 128–134. o. (1958. november, ill. december)

[2]Lásd a megoldást KML. XIII. kötet 78. o. 1956. november.



A forgások szöge $\omega = 180° - 2\varphi$, az oldalak fölé írt háromszögek új csúcsánál fekvő szög. Legyen C_1 új helyzete C_1', ill. C_1''. Ekkor a $CC_1'C_1'' = H'$ háromszög egyenlő szárú, mert $CC_1' = AC_1 = BC_1 = CC_1''$.

Meghatározzuk a H' alapján fekvő szögeket és azt, hogy C a $C_1'C_1''$ egyenes melyik partján fekszik. Első forgatásunk pozitív, a második negatív irányú, mert az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög és vele H_1 is pozitív körüljárású (húzzunk vezérsugarat H bármely belső pontjából H, ill. a hatszög kerületét bejáró ponthoz). Így a $CC_1' = f_1$ félegyenest C körül $CC_1'' = f_2$-be átvivő pozitív forgás szöge: $\vartheta = C_1'CB_1\sphericalangle + B_1CA_1\sphericalangle + A_1CC_1''\sphericalangle = C_1AB_1\sphericalangle + B_1CA_1\sphericalangle + A_1BC_1\sphericalangle = (\alpha + 2\varphi) + (\gamma + 2\varphi) + (\beta + 2\varphi) = 180° + 6\varphi$. Így ϑ nagyobb $180°$-nál, ezért H' szárai rövidebb forgással is átvihetők egymásba; a következőkben megmutatjuk C szerkesztését ϑ különböző értékei mellett.

Ha $\varphi < 30°$, akkor $\vartheta < 360°$, így f_2-t f_1-be $360° - \vartheta = 180° - 6\varphi (< 180°)$, szögű pozitív forgás viszi át, ezért H' csúcsainak C_1'', C_1', C sorrendje ad pozitív körüljárást, benne $C_1''\sphericalangle = C_1'\sphericalangle = 3\varphi (< 90°)$. Így C szerkesztése: C_1-nek B_1 körüli $+(180° - 2\varphi)$ és A_1 körüli $-(180° - 2\varphi)$ szögű forgatásával előáll C_1' és C_1'', ezek felező merőlegeséből C-t az a $C_1''C$ száregyenes metszi ki, amely a $C_1''C_1'$ félegyenesből $+3\varphi$ szögü forgással áll elő. A-t és B-t hasonlóan kaphatjuk, de pl. A-t megadja a CB_1-ből $+\varphi$ és B_1C-ből $-(180° - 2\varphi)$ forgatással előálló félegyenesek metszéspontja is.

($\varphi = 30°$ mellett $\vartheta = 360°$, így $C_1'' \equiv C_1'$; ez is felhívná a figyelmet ennek az esetnek külön vizsgálatára.)

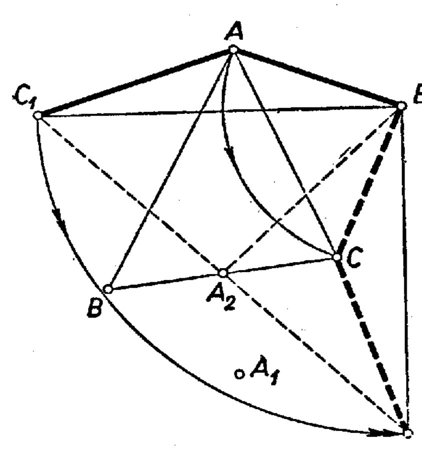
$30° < \varphi < 60°$ mellett $360° < \vartheta < 540°$, így f_1-et C körül f_2-be átviszi a $(0° <)\vartheta - 360° = 6\varphi - 180° (< 180°)$ szögű forgás, H'-nek a $C_1'C_1''C$ körüljárása pozitív, az alapon fekvő szögek nagysága $[180° - (6\varphi - 180°)]/2 = 180° - 3\varphi)(< 90°)$.

$\varphi = 60°$ mellett (a versenyfeladat esete) $\omega = 60°$ és $\vartheta = 540° = 360° + 180°$, így H' egyenes szakasszá fajul, C felezőpontja $C_1'C_1''$-nek.[3]

$60° < \varphi < 90°$ mellett $540° < \vartheta < 720°$, f_1 átjut f_2-be a $(0° <)720° - \vartheta = 540° - 6\varphi (< 180°)$ forgással is, H' körüljárása ismét a C_1'', C_1', C sorrendben pozitív, az alapon $[180° - (540° - 6\varphi]/2 = 3\varphi - 180° (< 90°)$ nagyságú szögek vannak.

A fentiek alapján φ minden figyelembe veendő értéke mellett megszerkeszthetjük C-t.

A speciális $\varphi = 45°$ esetben $2\omega = 180°$, ez a különleges érték módot nyújt egyszerűsítésre, pl. C_1'' mellőzhető.



Így ugyanis C_1B és CC_1' a C_1A-hoz képest $-90°$, ill. $+90°$-kal vannak elfordulva, tehát párhuzamosak. Ezért a $C_1BC_1'C$ négyszög paralelogramma, ismert C_1C_1' átlójának A_2 felezőpontja megadja az ismeretlen BC átló (azaz oldal) felezőpontját. Sőt C_1'-t is mellőzhetjük, mert ez esetben $C_1C_1'B_1$ egyenlő szárú derékszögű háromszög (átfogója C_1C_1'), ezért ugyanez áll $B_1C_1A_2$-re is (átfogója B_1C_1), tehát A_2-t az adott B_1C_1 oldal fölé befelé írt egyenlő szárú derékszögű háromszög harmadik csúcsaként egyszerűbben kapjuk. Ugyanígy szerkesztjük CA és AB-nek B_2, C_2 felezőpontját, ezekből pedig H-t. (A háromszögek befelé szerkesztendők, ugyanis a B_1C_1,-et B_1A_2-be vivő forgás pozitív, mert fele a C_1'-t előállító forgásnak, és arról láttuk, hogy pozitív – akárcsak a B_1C_1-ből B_1A_1-be vivő forgás.)

[3] A versenyfeladat 1. ábráján A_2, B_2, megfelel C_1', C_1''-nek, mert pl. a C_1 körüli $-60°$-os forgással B_1 ugyanoda jut, mint B_1, a C_1 körüli $+60°$-os forgással.

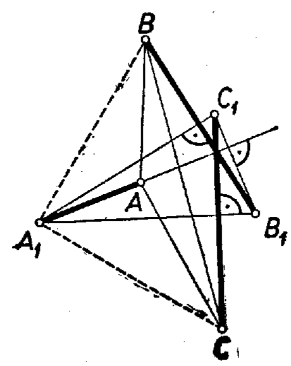
A fentiek szerint az $A_2B_2C_2 = H_2$ háromszög középháromszöge H-nak, tehát hasonló helyzetűek, akárcsak a $\varphi = 60°$ esetben (csak a nagyítási arány más). Itt is van olyan felvétel (pl. ha H_1 szögei: 30°, 60°, 90°, amelyben A_1, B_1, C_1 a kész H-hoz képest nem a kifelé, hanem a befelé írt megfelelő háromszögek csúcsainak bizonyulnak, és ilyenkor is H_2 és H a H_1-gyel ellentétes körüljárásúak. Ebből az idézett cikk gondolatmenetét mindenben követve annak feltételéül, hogy H_2 a H_1-gyel azonos körüljárásúnak adódjék, ezt kapjuk:

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

(a mintabeli $\sqrt{3}$ számok helyén mindenütt 1 áll). Ezt az említett példa (30°, 60°, 90°) nem teljesíti: $\sqrt{3}$ nem nagyobb, mint 2.

Arató Péter (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

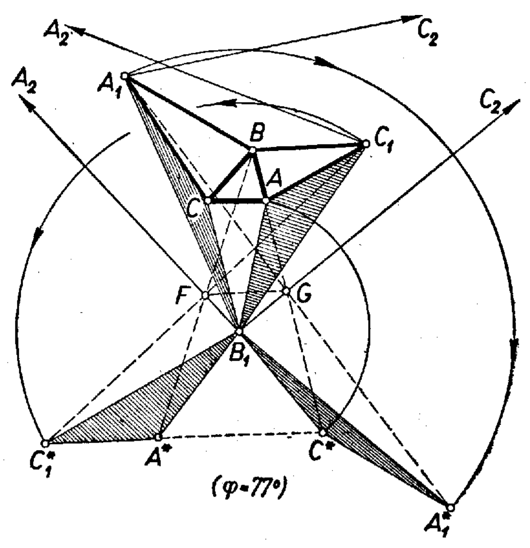
Megjegyzés. $\varphi = 45°$ esetén H csúcsait forgatások nélkül úgy is megkapjuk, ha H_1 mindegyik magasságára a csúcstól a szemben fekvő oldal felé felmérjük a szemben fekvő oldalt, pl. A_1-ből a B_1C_1 felé, rá merőlegesen felmért B_1C_1 szakasz végpontja A.



Valóban, így pl. az A_1B_1B és CC_1A_1 háromszögek egybevágók, hiszen $A_1B_1 = CC_1$, $B_1B = C_1A_1$ és $A_1B_1B\sphericalangle = CC_1A_1\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyes szögek (a magasságszakasz a megfelelő oldalszakaszokkal hegyes szöget zár be). A két oldalpár merőlegessége folytán a BA_1 és A_1C harmadik oldalak is merőlegesek, másrészt az egybevágóság folytán egyenlők, így A_1 valóban a BC átfogó fölé valamelyik oldalra szerkesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög harmadik csúcsa.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás: Forgassuk el a B_1C_1A háromszöget B_1 körül $+2\varphi$ szöggel, amennyi a C_1BA háromszög C_1-nél fekvő külső szöge; így az AC_1 oldal új $A^*C_1^*$ helyzete párhuzamos és egyirányú C_1B-vel. Ezért $C_1BC_1^*A^*$ paralelogramma, tehát az ismert $C_1C_1^*$ átló F felezőpontja a BA^* átlót is felezi.



Hasonlóan kapjuk a B_1A_1C háromszögnek B_1 körül. -2φ szöggel $B_1A_1^*C^*$-ba való elforgatása és az $A_1BA_1^*C^*$ paralelogramma révén BC^*-nak G felezőpontját. FG párhuzamos A^*C^*-gal, mert a BA^*C^* háromszög középvonala, tehát CA-val is, mert az ACA^*C^* négyszög egy a B_1 középpontú, B_1A sugarú körbe írt szimmetrikus trapéz. Eszerint FG megadja CA irányát. Hasonlóan kapjuk AB, BC irányát is, és belőlük az 1. megoldás 2. megjegyzésében leírt módon a keresett H-t.

$\varphi = 45°$ esetén ez a szerkesztés is egyszerűsödik: $A^* \equiv C$ és $C^* \equiv A$-ra, és tovább $F \equiv A_2$, $G \equiv C_2$-re vezet; a II. megoldás szerkesztésével való azonosságot az magyarázza, hogy itt $2\varphi = \omega$. (*L. P.*)

Megjegyzések. 1. Láttuk, hogy H_1 oldalai fölé befelé $\varphi = 60°$ és $\varphi = 45°$ alapszögű egyenlő szárú háromszögeket szerkesztve a harmadik csúcsok által alkotott H_2 háromszög hasonló helyzetű az eredeti H-hoz, és így vele azonos körüljárású. Megmutatjuk, hogy ez a tény bármely $\varphi \neq 30°$ hegyes szög esetén fennáll. Ehhez elég belátnunk H és H_2, egy tetszés szerinti megfelelő oldalpárjának párhuzamosságát. – Valóban, F a $B_1C_1C_1^*$ egyenlő szárú háromszög $C_1C_1^*$ alapjának felezőpontja, a B_1-nél levő szög 2φ, ezért $FB_1C_1\sphericalangle = \varphi$, tehát A_2 a B_1F egyenesen fekszik, továbbá F a $B_1C_1A_2$ háromszög B_1A_2 szárához tartozó magasság talppontja. (Így lesz $B_1C_1A_2$ befelé írt háromszög, mert C_1^*, F és A_2 ugyanazon oldalán van B_1C_1-nek, mint A_1.) Ugyanígy C_2 a B_1G egyenesen van és G az $A_1B_1C_2$, háromszög B_1C_2 oldalához tartozó magasság talppontja. Mivel pedig a $B_1C_1A_2$ és $A_1B_1C_2$ háromszögek hasonlók, azért $B_1A_2 : B_1C_2 = B_1F : B_1G$, ennélfogva A_2C_2 párhuzamos FG-vel és a fentebbiek szerint AC-vel, amit bizonyítani akartunk.

H_2 ezen tulajdonsága alapján tetszőleges φ-re elvégezhetjük az idézett cikknek megfelelő diszkussziót, alább ezt vázoljuk. $\sqrt{3}$ helyett $\operatorname{tg}\varphi = \mu$-vel a feladat követelményét kielégítő H háromszög létezésének feltétele:

$$(3\mu^2+1)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > \mu(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma). \tag{1}$$

Ezen egyenlőtlenség fennállásának *szükséges* feltétele, hogy H_1 szögei a

$$\frac{3\mu^2+1}{2}\sin\alpha - \mu - \mu(1-\cos\alpha) = 0$$

egyenlet gyökei által meghatározott „középső” intervallumba essenek. Innen (egyszersmind $\operatorname{ctg}\varphi = 1/\mu = \nu$-vel is kifejezve

$$\cos\alpha = \frac{8\mu^2 \pm (9\mu^4-1)}{9\mu^4+10\mu^2+1},$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{9\mu^4+8\mu^2-1}{9\mu^4+10\mu^2+1} = \frac{(9\mu^2-1)(\mu^2+1)}{(9\mu^2+1)(\mu^2+1)} = \frac{9\mu^2-1}{9\mu^2+1} = \frac{9-\nu^2}{9+\nu^2},$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{-9\mu^4+8\mu^2+1}{(9\mu^2+1)(\mu^2+1)} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} = \frac{\nu^2-1}{\nu^2+1}.$$

$0°$-hoz „közel járó” φ-vel $(\mu \approx 0)$ α_2 „közel jár” $0°$-hoz, mert $\cos\alpha_2 \approx 1$, α_1 pedig $180°$-hoz, mert $\cos\alpha_1 \approx -1$; és hasonlóan $90°$-ot megközelítő φ-vel $(\nu \approx 0)$ $\alpha_1 \approx 0°$ és $\alpha_2 \approx 180°$, vagyis a „középső” intervallum a H_1 szögeire majdnem minden értéket megenged. Ha viszont a diszkrimináns: $9\mu^4-1=0$, azaz $\mu = 1/\sqrt{3}$, $\varphi = 30°$, akkor az intervallum egyetlen pontra zsugorodik össze: $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$, ennél – mint tudjuk – H_1 szögei sem kisebbek, sem nagyobbak nem lehetnek. Mennél távolabb van φ a „kritikus” $30°$ értéktől (akár felette, akár alatta), annál tágabb határok között változtatható az adott H_1 alakja. $\varphi = 45°$-ra a határok $\cos\alpha_1 = 4/5$-ből $\alpha_1 \approx 36{,}9°$ és $\cos\alpha_2 = 0$-ból, $\alpha_2 = 90°$.

Végül α-val H_1 legkisebb szögét jelölve (1) fennállásinak *elégséges* feltételeként (a cikk jelöléseivel) az

$$f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta-\gamma-180°-3\alpha} = 2\sin^2\alpha[(3\mu^2+1)\sin\alpha\cos\alpha - \mu(\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha)] > 0$$

egyenlőtlenségre jutunk. A bal oldal 0-helyei: $\operatorname{tg}\alpha_1 = 3\mu$ és $\operatorname{tg}\alpha_2 = 1/\mu$. Ezekből $\varphi = 30°$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$, minden más esetben α_1 és α_2 egyike kisebb $60°$-nál: Ha α (vagyis H_1 mindegyik szöge) nagyobb ennél, akkor H megszerkeszthető.

Lőrincz Pál

2. A $\cos 2\varphi = (1-\operatorname{tg}^2\varphi)/(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = (1-\mu^2)/(1+\mu^2)$ azonosság alapján látjuk, hogy a közbülső intervallum egyik határa $\alpha_2 = 2\varphi$. Hasonlóan $3\operatorname{tg}\varphi = 3\mu = \operatorname{tg}\psi$ jelöléssel $-\cos\alpha_1 = \cos(180°-\alpha_1) = (1-\operatorname{tg}^2\psi)/(1+\operatorname{tg}^2\psi) = \cos 2\psi$-ből $\alpha_1/2$ annak a szögnek a pótszöge, amelynek tangense 3-szorosa φ tangensének. A szükséges feltételt adó ezen eredményekhez az 575. gyakorlat[4] általánosításában egyszerűbben jutottunk el; ott azonban kizárólag egyenlő szárú H_1 háromszögekről és elfajult H_2-ről volt szó. Innen viszont (ti. az idézett cikk vizsgálataiból) a kérdésünkre megoldást adó bármely H_1-ről többet tudtunk meg.

[4]Lásd ezen számban, 176. o.