a) Helyezzünk alakzataink síkjára olyan derékszögű koordinátarendszert, melynek X tengelye párhuzamos az x egyenessel, origója pedig a $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ alakzat képezésénél használt kezdőpont. Ekkor az x-szel párhuzamos támaszegyenesek egyenlete $y = k$ alakú; legyen az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ alakzat ilyen támaszsávjait határoló támaszegyeneseinek egyenletében rendre $k = a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$, úgy hogy $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$. A támaszegyenesek és a támaszsáv fogalmából következik, hogy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$-nek van legalább egy a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 ordinátájú pontja, legyen egy-egy ilyen rendre A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, továbbá hogy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ tetszés szerinti $U(X_u, Y_u)$, $V(X_v, Y_v)$, $W(X_w, Y_w)$ pontjának ordinátájára $a_1 \leq y_u \leq a_2$, $b_1 \leq y_v \leq b_2$, $c_1 \leq y_w \leq c_2$. Másrészt a támaszsávok szélességére fennáll: $a = a_2 - a_1$, $b = b_2 - b_1$, $c = c_2 - c_1$. Ennek megfelelően ezt fogjuk bebizonyítani: fennáll $c_2 - c_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) = (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)$, mert $c_2 = a_2 + b_2$ és $c_1 = a_1 + b_1$.

Valóban, c_1, ill. c_2 sem nagyobb, sem kisebb nem lehet, mint a_1+b_1, ill. a_2+b_2. Ugyanis az összegtartomány-képezés $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OW}$ vektori módjából következik, hogy e vektoroknak az Y-tengellyel párhuzamos komponenseire, vagyis az ordinátákra $y_u + y_v = y_w$. Minden $\mathbf{A}$-, ill. $\mathbf{B}$-beli U, V pontpárhoz tartozó W pont benne van $\mathbf{C}$-ben. Ezt az A_1, B_1 és az A_2, B_2 párra alkalmazva a fentiek szerint

$$a_1 + b_1 \geq c_1, \qquad a_2 + b_2 \leq c_2. \tag{1}$$

Másrészt $\mathbf{C}$-be csak olyan W pontok tartoznak, amelyekhez van $\mathbf{A}-$, ill. $\mathbf{B}-$ben a vektor-egyenlőséget kielégítő U, V. Ezt C_1, C_2-re alkalmazva van $\mathbf{A}$-ban olyan A' és A'', van $\mathbf{B}$-ben olyan B', B'' pont, ordinátáik rendre a', a'', b', b'', hogy $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC_1}$, ill. $\overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OC_2}$, tehát

$$a' + b' = c_1, \qquad a'' + b'' = c_2. \tag{2}$$

Itt egyrészt $a' \geq a_1$, $b' \geq b_1$, másrészt $a'' \leq a_2$, $b'' \leq b_2$, tehát (2) bal oldalán a', b', ill. a'', b''-t a_1, b_1, a_2, b_2-vel kicserélve az összeget csökkentjük vagy változatlanul hagyjuk, ill. növeljük vagy változatlanul hagyjuk, ezért

$$a_1 + b_1 \leq c_1, \qquad a_2 + b_2 \geq c_2. \tag{3}$$

Most már (3) szerint c_1 nem kisebb $a_1 + b_1$-nél, (1) szerint pedig nem nagyobb nála, tehát csak egyenlő lehet vele; ugyanez áll $a_2 + b_2$ és c_2 között is, és ezt akartuk bizonyítani.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t)

b) Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz: van $\mathbf{B}$-nek legalább egy olyan, b_1 és b_2 oldalakkal biró $\mathbf{T}$ támasztéglalapja, amelyre $b_1 \neq b_2$. Legyen $\mathbf{T}$ két szomszédos oldalegyenese x_1 és x_2 (úgy, hogy $x_1 // b_2$ és $x_2 // b_1$), tekintsük $\mathbf{A}$-nak x_1 és x_2-vel párhuzamos oldalú T_a támasznégyzetét, és legyen ennek oldala a. Minden támasztéglalap (tehát a támasznégyzet is!) két egymásra merőleges határvonalú támaszsáv közös része; így az *a)* állításnak az x_1, x_2 irányokra való alkalmazásával az $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ összegtartomány x_1, x_2-vel párhuzamos támaszsávjának szélessége:

$$c_1 = a + b_1, \qquad c_2 = a + b_2.$$

Innen a fentiek szerint $c_1 \neq c_2$ tehát $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ nem négyzetekkel burkolható. Következtetésünk ellentétben áll a feltevéssel, ezért kiegészítő feltevésünk helytelen, tehát $\mathbf{B}$ négyzetekkel burkolható.

Ratkó István (Budapest, Arany J. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az *a)* állítás helyessége az idézett cikk 3. pontjának utolsó bekezdésére[1] támaszkodva szemléletesen így látható be. Tekintsük síkunkat függőlegesnek, benne x-et vízszintesnek, válasszuk O-nak $\mathbf{B}$ egy belső pontját, és legyen $\mathbf{B}$ támaszsávja „alsó" támaszegyenesén egy $\mathbf{B}$-hez tartozó B_1 pont O alatti „mélysége" b_1, „felső" támaszegyenese egy $\mathbf{B}$-hez tartozó B_2 pontjának O fölötti magassága b_2; ekkor O-hoz viszonyítva nincs $\mathbf{B}$-nek b_1-nél mélyebben és b_2-nél magasabban fekvő pontja és $b_1 + b_2 = b$. Legyen továbbá $\mathbf{A}$ alsó, ill. felső támaszegyenesének egy-egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó pontja A_1, ill. A_2, ekkor A_2 magassága A_1 fölött a. Minthogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ konvexek, elégnek látszik, ha az $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ tartománynak lefedéssel való előállítása végett $\mathbf{B}$ végtelen sok példányából az O-nál fogva $\mathbf{A}$-nak csak minden kerületi pontjára helyezünk egy-egy példányt, más szóval, ha $\mathbf{B}$-t O-nál fogva és eredeti állását megtartva végigvezetjük $\mathbf{A}$ kerületén; az így „súrolt" pontok, továbbá $\mathbf{A}$ belseje alkotják $\mathbf{A}+\mathbf{B}$-t az O kezdőpontra vonatkozóan. Mármost $\mathbf{A}+\mathbf{B}$-nek van A_1-nél b_1-gyel mélyebben fekvő pontja, ilyen pl. B_1-nek az a B_1^* helyzete, amikor O A_1-ben van (vagy amikor O az $\mathbf{A}$ alsó támaszegyenesének $\mathbf{A}$-hoz tartozó esetleges más pontjában van), de ennél mélyebben fekvő pontja nincs. És van $\mathbf{A}+\mathbf{B}$-nek A_1-nél $a + b_2$-vel magasabban, vagyis A_2-nél b_2-vel magasabban fekvő pontja, ilyen pl. B_2-nek az a B_2^* helyzete, amikor O A_2-ben van, de ennél magasabban fekvő nincs. Ezért $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ támaszsávjának szélessége („magassága") $b_1 + a + b_2 = a + b$.

Hegedűs István (Budapest, József A. g. III. o. t.)

2. Ez a „belátás" a szemlélet számára elfogadható, de nem tekinthető szoros értelemben vett bizonyításnak. Jó megértés érdekében szemléletesen szokás előkészíteni a használandó fogalmakat, ez után következik a fogalom pontos meghatározása – amint az ebben a tárgykörben is történt (XVIII. kötet 1. sz. 4. o. alsó és 5. o. első bekezdése), végül

[1] XVIII. kötet 1. sz. 6. o.

esetleg más utak említése, amelyekkel a megszerzett fogalmat meg lehet erősíteni. Rövid cikkekben nincs is mindig hely a részletes kifejtésre, így egyes tények „nyilvánvalónak” minősülnek, bizonyításuk pedig az olvasóra marad. Ez történt feladatunkban is, de ez többeket megtévesztett. Több dolgozat az *a)* állítást a cikk II. tételével kívánta bizonyítani, mondván, hogy *a)* benne van a tételben. Ámde a II. tétel bizonyításának I. bekezdése éppen az *a)* állításra, ill. annál valamivel többre *„támaszkodik”*, e könnyen belátható tény bizonyításának végrehajtását az olvasó számára hagyva, hogy az az egyszerű, de mégis újszerű gondolatokat gyakorolhassa. Erre a munkára serkent a feladat.

3. A *b)* állítás bizonyításaiban gyakori hiba, hogy a **B** támasztéglalapjának oldalai az **A** és **A**+**B** támasznégyzeteinek oldalaiból $b_1 = c_1 - a$ és $b_2 = c_2 - a$-nak fejezik ki, evvel mintegy a **B** tartományt az **A**+**B** és **A** tartományok „különbségi tartományának” tekintve – holott ilyen fogalmat a cikk nem értelmezett. Más kérdés az, hogy az *a)*-beli tételből nem nehéz bizonyítani az állítás igaz voltát.