Meg kell keresnünk $23°$ alatt és $100°$ fölött azokat a tizedfokra kerekített, egymástól $0{,}1°$-kal eltérő, α-értékpárokat, amelyeknek egyik értékével az adott egyenlőtlenség még teljesül, vagyis a bal oldal pozitív, a másikával már nem teljesül, mert a bal oldal negatív. A számítások megkönnyítésére, egyenlőtlenségünk bal oldalának 2-szeresét így is írhatjuk:[1]

$$(10\sin\alpha - 2\sqrt{3})\big[\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)\big] - 2\sqrt{3}\big\{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)[1-\cos(\beta-\gamma)]\big\}.$$

Tovább $2\cos(\beta-\gamma) = \sqrt{3}$ és $-2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha - 1$ behelyettesítésével, beszorzással és rendezéssel:

$$\begin{gathered}(10\sin\alpha\,\cos\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha) + (5\sqrt{3}\sin\alpha - 3\cos\alpha) - 3\sqrt{3} = \\ = (4\sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha) + (5\sqrt{3}\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2\cos\alpha) - 3\sqrt{3},\end{gathered}$$

végül $\sqrt{3} = 2\sin 60° = 2\cos 30°$ és $1 = 2\cos 60° = 2\sin 30°$ figyelembevételével, egy-egy összeg szinuszát felismerve:

$$\begin{gathered}4\sin 2\alpha + (2\cos 60°\sin 2\alpha + 2\sin 60°\cos 2\alpha) + (10\cos 30°\sin\alpha - 10\sin 30°\cos\alpha) + 2\cos\alpha - 3\sqrt{3} = \\ = 4\sin 2\alpha + 2\sin(2\alpha + 60°) + 10\sin(\alpha - 30°) + 2\cos\alpha - 3\sqrt{3}.\end{gathered}$$

Így α előírt értékeit az

$$f(a) \equiv 2\sin 2\alpha + \sin(2\alpha + 60°) + 5\sin(\alpha - 30°) + \cos\alpha - 3\sqrt{3}/2$$

kifejezés előjelének vizsgálatával kereshetjük, ebben valóban csak egész számokkal kell szoroznunk a táblázatból könnyen kivehető értékeket.

Már most $f(30°) = 1$ (könnyen számítható érték) és az adott helyen: $f(23°) = 0{,}1128$, vagyis $30° - 23° = 7°$ csökkenésre f értéke $1 - 0{,}1128 = 0{,}8872$-del csökkent. Hogy $f(\alpha)$ negatívvá váljék, további több mint $0{,}1128$ csökkenés szükséges, az előzőnek mintegy 8-ad része, csökkentsük tehát α-t kereken $1°$-kal. Így $f(22°) = -0{,}0072 < 0$. A beállt csökkenés: $0{,}1200$, több mint 10-szerese $|f(22°)|$-nek, amennyivel nagyobb f értéket a következő lépésben kell keresnünk. Így várható, hogy $0{,}1°$-kal visszalépve ismét pozitív lesz f. Valóban, $f(22{,}1°) = +0{,}0052 > 0$, tehát a keresett legkisebb érték: $\alpha_{\min} = 22{,}1°$.

Hasonlóan $f(90°) = \sqrt{3}/2 = 0{,}8660$ (könnyen megállapítható érték), $f(100°) = 0{,}2580$, vagyis $10°$ növekedésre f-ben kb. 0,6 csökkenés állt be. A még elérendő csökkenés ennek nem egészen fele, növeljük tehát α-t durván $10°$ felével. Így $f(105°) = -0{,}0273$, vagyis $5°$ növekedésre $0{,}2853$ csökkenés állt be. $f(105°)$-hoz képest kb. ennek 10-edrészével kell növelnünk, csökkentsük tehát α-t $5° : 10 = 0{,}5°$-kal. Ekkor $f(104{,}5°) = +0{,}0002$, még pozitív, de már $f(104{,}6°) < 0$, ennélfogva α keresett legnagyobb értéke: $\alpha_{\max} = 104{,}5°$.

Kolonits Ferenc (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Ha tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei pl. $\alpha = 22{,}8°$, $\beta = 93{,}6°$, $\gamma = 63{,}6°$, vagy $\alpha = 104{,}4°$, $\beta = 52{,}8°$, $\gamma = 22{,}8°$, akkor a hozzá az idézett cikk szerint szerkesztett $A_2B_2C_2$ háromszög vele azonos körüljárású.

[1] Lásd *Lőrincz Pál:* Megjegyzések egy versenyfeladathoz c. cikkének (2) és (5) kifejezéseit, KML. XVII. köt. 131–132. o. (1958. december)