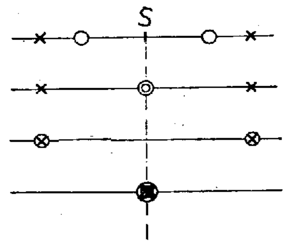
I. megoldás: Tekintsük az a, b, c, d számoknak törzsszámhatványok szorzatára bontott alakját, és képezzük ezekből a szükséges legnagyobb közös osztókat (tovább röviden LKO) is szorzat-alakban. Ebben minden p törzsszámnak a kitevője egyenlő azoknak a kitevőknek a legkisebbikével, amelyekkel p a megfelelő számok felbontott alakjában szerepel. Így a bizonyítás minden egyes p-re külön végezhető annak megmutatásával, hogy p a bizonyítandó egyenlőség két oldalán ugyanazon kitevővel szerepel. Legyen p kitevője a, b, c, d felbontásában rendre α, β, γ, δ, így az ab és cd szorzatokban $\alpha+\beta$, ill. $\gamma+\delta$ és $ab=cd$ folytán $\alpha+\beta=\gamma+\delta$. A kitevők nagyságviszonya $2^3=8$-féle lehet.



A kapott összefüggés ugyanis szemléletesen azt jelenti, hogy egyrészt α és β-nak, másrészt γ és δ-nak a számvonalon levő képei egymásnak ugyanazon S pontra, a számtani közepüket ábrázoló pontra tükörképei, tehát e két pontpár egyike „külső”, másika „belső” pontpár (az ábrán $\times$, ill. $\bigcirc$ jellel; természetesen lehetségesek egybeesések, lásd az ábra változatait). Eszerint 2 lehetőség van arra, hogy a két kitevőpárnak melyike a külső, és további 2–2 lehetőség arra, hogy a pároknak melyik tagja a kisebb. γ és δ nagyságviszonyát azonban figyelmen kívül hagyhatjuk, mert c és d felcserélésével a bizonyítandó egyenlőség önmagába megy át, így feltehetjük, hogy $\gamma\le\delta$. A maradó 4 nagysági sorrend mellett p-nek (a,c)-ben, (a,d)-ben és $(a,\,b,\,c,\,d)$-ben adódó κ, λ, ill. μ kitevőjét, végül a bizonyítandó egyenlőség bal oldatán adódó $\kappa+\lambda-\mu$ kitevőjét az alábbi táblázat tünteti fel. Az utolsó sor mutatja, hogy e kitevő egyenlő a jobb oldalon álló a-beli kitevővel, tehát az állítás helyes.

	$\alpha\le\gamma\le\delta\le\beta$	$\beta\le\gamma\le\delta\le\alpha$	$\gamma\le\alpha\le\beta\le\delta$	$\gamma\le\beta\le\gamma\le\delta$
κ	α	γ	γ	γ
λ	α	δ	α	α
μ	α	β	γ	γ
$\kappa+\lambda-\mu$	α	$(\gamma+\delta)-\beta=$ $=(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$	α	α

Durst István (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)

II. megoldás: Felhasználunk két a LKO-ra vonatkozó egyenlőséget:[1]

$$((l,m,\ldots),(l',m',\ldots))=(l,m,\ldots;l',m',\ldots), \tag{1}$$

– vagyis két LKO-nak LKO-ja egyenlő valamennyi szóban forgó szám LKO-jával –

$$k(l,m,\ldots)=(kl,km,\ldots), \tag{2}$$

– vagyis adott számok LKO-jának k-szorosa egyenlő a k-szor akkora számok LKO-jával, és fordítva: az adott számok bármely közös tényezője a LKO jeléből kiemelhető. Így (a,c)-t átmenetileg e-vel is jelölve az idézett egyenlőségek, valamint a $cd=ab$ feltevés alapján

$$(a,c)\cdot(a,d)=e(a,d)=(ae,de)=(a(a,c),d(a,c))=\big((a^2,ac),(ad,cd)\big)=$$
$$=(a^2,ac,ad,cd)=(a^2,ac,ad,ab)=a(a,b,c,d).$$

A bizonyítandó egyenlőség innen osztással adódik. Az osztásnak nincs akadálya, mert $(a,b,c,d)\ge1$.

Hammer Géza (Budapest, Toldy F. g. III. o. t.)

[1] Lásd: *Kürschák–Hajós– Neukomm–Surányi:* Mat. Versenytételek I. 103. o. Tankönyvkiadó, 1955)