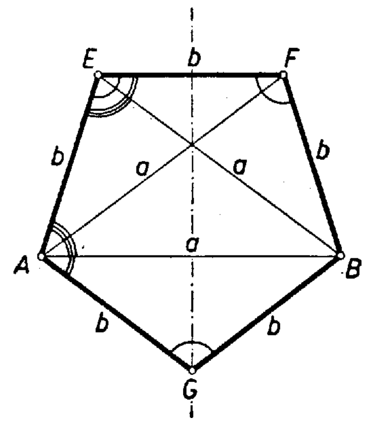
I. megoldás: Minden olyan síklapokkal határolt konvex test szabályos dodekaéder, amelyet 12 egybevágó szabályos ötszög határol (1), és minden csúcsában 3 ilyen lap találkozik (2). Azt kell tehát megmutatnunk, hogy a **D** testnek megvan e két tulajdonsága.

A **P** testek **K**-hoz nem tartozó csúcsaiban 3 lap találkozik. Ugyanez áll **D**-nek **K**-val közös csúcsaira, mert minden ilyen csúcsban három **P** találkozik, mindegyiken két kívülről látható lap van, és ez a $3 \cdot 2$ lap-rész kettesével egy-egy lapot alkot. Eszerint **D**-nek megvan a (2) tulajdonsága.



Az (1) tulajdonsághoz elég megmutatni, hogy **D** egy lapja szabályos ötszög. Legyen az $ABCD$ kockalapra illesztett **P**-nek további két csúcsát összekötő él párhuzamos AB-vel, végpontjai legyenek E, F, és az $ABRS$ kockalapra illesztett **P**-nek A, B-vel, háromszöget alkotó csúcsa G. Az $AGBFE$ lapon a feltevés folytán $AG = GB = BF = FE = EA = b$; megmutatjuk, hogy szögei is egyenlők. Láttuk, hogy $AF = BE = AB = a$, ennélfogva az AEF, EFB, BGA egyenlő szárú háromszögek egybevágók, tehát az E, F, G csúcsnál fekvő szögek egyenlők. A tengelyes szimmetria folytán A és B-nél is egyenlő szögek feküsznek, elég tehát belátni az A és E-nél fekvő szögek egyenlőségét. Ezeket az AB, EB átlók 2 – 2 egyenlő részre osztják, mert az említett egybevágóság folytán a GAB és FEB, másrészt a BAE és BEA szögek egyenlők, ugyanis az AEB háromszög egyenlő szárú. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

II. megoldás: Az (1) tulajdonság fennállását az alábbiak szerint is beláthatjuk: A hivatkozott megoldás szerint az $AGBFE$ ötszög b oldalai és $AB = AF = BE = a$ átlói között fennáll az $ab + b^2 = a^2$ összefüggés. Innen $a(a - b) = b^2$, tehát egyrészt $a > b$, másrészt $a : b = b : (a - b)$. Ez azt jelenti, hogy ha az AB szakaszon úgy tűzzük ki H-t, hogy $BH = BG = b$, ennélfogva $AH = a - b$, akkor az ABG és AGH háromszögekben $AB : AG = AG \cdot AH$, és mivel bennük az ezen oldalak közti szög közös, azért hasonlók. Így AGH is egyenlő szárú háromszög, tehát $BAG\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel $BGH\sphericalangle = BHG\sphericalangle = 2\alpha$, és a BGH háromszög szögeinek összegéből $\alpha = 180^\circ : 5 = 36^\circ$, továbbá $BGA\sphericalangle = 108^\circ$. Ugyanekkora szög fekszik E és F-nél, így az ötszög A és B-nél fekvő, a szimmetria folytán egyenlő szögeinek összege $540^\circ - 3 \cdot 108^\circ = 216^\circ$, tehát ezek is 108°-osak, az ötszög szabályos.

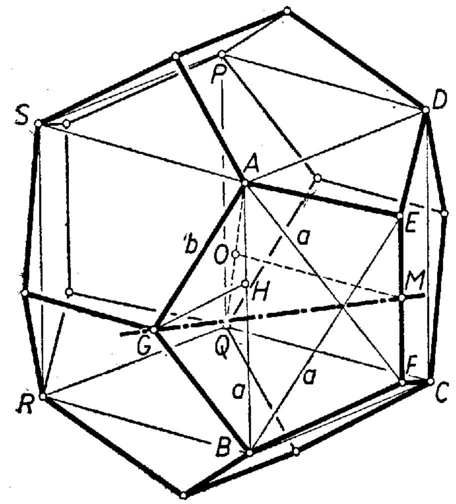
Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az $ab + b^2 = a^2$ összefüggés alapján a szögeket trigonometriai úton is megkaphatjuk. b-nek a hivatkozott megoldáshoz fűzött 1. megjegyzésben közölt kifejezésével $\cos\alpha = a/2b = (\sqrt{5} + 1)/4$, ebből pedig $\alpha = 36^\circ$.[2]

Németh László (Sopron, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Bebizonyítjuk, hogy **D** köré lehet gömböt írni. Ebből következik, hogy a lapok körbe írhatók, mert a körülírt gömbnek a lapsíkokkal való metszete kör, a körbeírt egyenlő oldalú sokszög pedig szabályos.

[2]Lásd pl. *Faragó László*: Mat. szakköri feladatgyűjtemény (2. kiad.) 194. o. (Tankönyv-kiadó, 1955).



Az említett **G** gömb **K**-nak is körülírt gömbje, így középpontja csak az AQ átló O felezőpontjában lehet, és sugara $r = AQ/2 = a\sqrt{3}/2$. Már most EF felező pontját M-mel jelölve a hivatkozott megoldás (1) kifejezése és az $a(a-b) = b^2$ összefüggés alapján: $OM = \dfrac{a}{2} + m = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{a(a-b)}{2}} = \dfrac{a+b}{2}$, másrészt $ME = b/2$, tehát

$$OE^2 = OM^2 + ME^2 = \frac{a^2 + (2ab + 2b^2)}{4} = \frac{a^2 + 2a^2}{4} = r^2,$$

vagyis E, F és a nekik megfelelő további pontok valóban **G**-n vannak.

Csanak György (Debrecen, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)