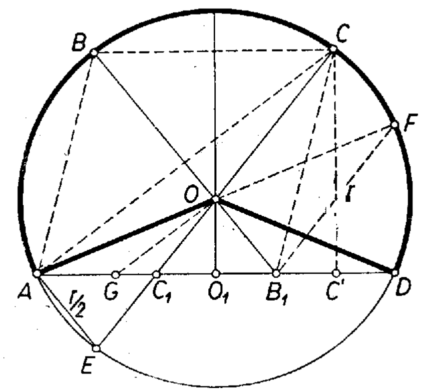
I. megoldás: Tegyük fel, hogy a kérdéses tulajdonságú AD ív létezik, pontjainak sorrendje az íven: A, B, C, D, tehát $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$, és jelöljük az OB, OC egyenesnek AD-vel való metszéspontját B_1, C_1-gyel, tehát $AC_1 = C_1B_1 = B_1D$. Ennélfogva AD felező merőlegese C_1B_1-et is felezi, a C_1B_1O háromszög egyenlő szárú. Legyen továbbá OC-nek a körrel való második metszéspontja (a rövidebb AD íven) E. Ekkor a C_1AE és C_1B_1O háromszögek egybevágók, mert $C_1A = C_1B_1$, C_1-nél fekvő szögeik csúcsszögek, $C_1EA\sphericalangle = CEA\sphericalangle = COA\sphericalangle/2 = COB\sphericalangle = C_1OB_1\sphericalangle$, ennélfogva $AE = B_1O = C_1O = C_1E = r/2$.

Eszerint a körön tetszés szerint felvett A ponthoz létezik D, és ezt azzal az AC_1 egyenessel metszhetjük ki, amely felezi az $AE = r/2$ hosszúságú húr E végpontjához tartozó OE sugarat. E és vele C_1 egyértelműen van meghatározva.

Serfőző Gusztáv (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Az eddigiekből $OB_1 \# AE$ is következik, ennélfogva B_1 paralelogrammává egészíti ki az OAE háromszöget, tehát az AD egyenes A-ból és B_1-ből is meghatározható. – Másképpen: az A-n átmenő átmérő másik végpontját F-fel jelölve OC_1 középvonala az FB_1A háromszögnek, így $FB_1 = 2\,OC_1 = r$, tehát B_1 az F körül r és O körül $r/2$ sugárral írt körök metszéspontjaként is szerkeszthető.

Tihanyi Ambrus (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)



II. megoldás: OB felezi az OA és OC egyenesek szögét, így OB_1 külső szögfelezője az OAC_1 háromszögnek, ezért $OC_1 : OA = B_1C_1 : B_1A = 1 : 2$.

Most már, az O-ból induló belső szögfelező talppontját G-vel jelölve $GC_1 : GA = OC_1 : OA = 1 : 2$, így G harmadolja AC_1-et, ennélfogva AB_1-et is. Ennek alapján a tetszés szerint felvett AD húrhoz megszerkeszthetjük azt a kört, amelyben a kívánt tulajdonság fennáll: megszerkesztjük AD-n B_1-et, majd G-t, és (a két szögfelező merőlegessége alapján) a GB_1 átmérő fölé írt Thalész-körrel AD felező merőlegeséből kimetsszük O-t.

Czinege Imre (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.)

III. megoldás: Az $ABCB_1$ négyszög deltoid, mert az $OB \equiv B_1B$ átló felező merőlegese az AC átlónak. Másrészt B és D az AC egyenesnek ellentétes partjain vannak, és a kerületi szögek tétele folytán $BCA\sphericalangle = DAC\sphericalangle$, így $BC \parallel AD = AB_1$, és a deltoid szimmetriája folytán $BA \parallel CB_1$. Eszerint az $ABCB_1$ négyszög rombusz: $BC = AB_1 = 2\,AD/3$.

Mindebből az is következik, hogy az $ABCD$ négyszög szimmetrikus trapéz, C-nek az AD-n levő C' vetülete felezi B_1D-t, továbbá, hogy $CD = BC = 2AD/3$.

Ezzel újabb módot nyertünk AD-hez a kör megszerkesztésére: AD-t 6 egyenlő részre osztva az A-tól 4-ik osztópont B_1, az ötödik C', a C'-ben emelt merőlegest D-ből $DC = AB_1$ sugárral elmetszve megkapjuk C-t.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. II. o. t.)

IV. megoldás: Az I. megoldás EOA szöge kiegészítő szöge a három egyenlő részre osztott AOD szög kétharmadának, AOC-nek. Így $AOD\sphericalangle = 6\,\alpha$ jelöléssel $EOA\sphericalangle = 180^\circ - 4\alpha$, és az EOA egyenlő szárú háromszögből $\sin EOA/2 = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = AE/2AO = 1/4$. Innen $2\alpha \approx 75^\circ 31{,}3'$ és $6\alpha = 226^\circ 34'$.

Valkó János (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. A III. megoldás CDC' derékszögű háromszögében $CDC'\sphericalangle = CDA\sphericalangle = COA\sphericalangle/2 = 2\alpha$, és így $\cos 2\alpha = C'D/CD = 1/4$.

2. AD felezőpontját O_1-gyel és OO_1-et d-vel jelölve az OO_1B_1 és OO_1D derékszögű háromszögekből $O_1B_1 = d\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $O_1D = d\,\mathrm{tg}\,(180^\circ - 3\alpha)$, másrészt $O_1B_1 : O_1D = 1 : 3$, innen $3\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,(180^\circ - 3\alpha)$.

Raisz Klára (Miskolc, Zrínyi Ilona lg. III. o. t.)