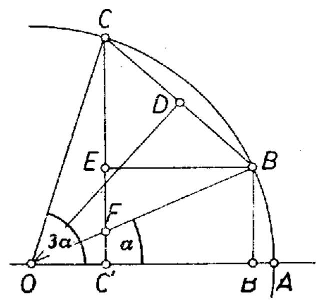
I. megoldás: $\sin 3\alpha$ kifejezhető $\sin\alpha$-val: $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha = (4\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha = (3-4\sin^2\alpha)\sin\alpha$. Az utolsó zárójelbeli kifejezést a következőképpen zárhatjuk két határ közé: emeljük négyzetre a feltételből következő $0 < \sin\alpha < 1/2$ kettős egyenlőtlenséget, szorozzunk mindenütt -4-gyel és adjunk hozzá mindenütt 3-at:

$$0 < \sin^2\alpha < 1/4; \quad 0 > -4\sin^2\alpha > -1; \quad 3 > 3 - 4\sin^2\alpha > 2.$$

Ezt a feltétel szerint pozitív $\sin\alpha$-val szorozva és középen $\sin 3\alpha$ fenti kifejezését felismerve a bizonyítandó egyenlőtlenséget nyerjük.

Máthé Csaba (Győr, Révai M. g. III. o. t.)

II. megoldás: Alkossanak az O középpont körüli $r = 1$ sugarú körnek OA sugarával az OB, OC sugarak a pozitív forgási irányban α, ill. 3α szöget, legyen B, C vetülete OA-n B' ill. C', (az OA szakasz belsejében, mert α és 3α hegyes szögek), így $BB' = \sin\alpha$, $CC' = \sin 3\alpha$; legyen továbbá az OBC egyenlő szárú háromszög O-ból húzott magassága OD, B vetülete CC'-n E (ugyancsak a CC' szakaszon), végül az $OC'BC$ konvex négyszög OB és CC' átlóinak metszéspontja F (mindkét átló belsejében).



Így egyrészt $DOB\sphericalangle = \alpha$, $BC = 2\sin\alpha$, másrészt az OFC' és OBD derékszögű háromszögek révén $CFB\sphericalangle = C'FO\sphericalangle = 90° - \alpha = OBD\sphericalangle = FBC\sphericalangle$, tehát az FBC háromszög egyenlő szárú. Így

$$\underline{2\sin\alpha} = BC = CF < CF + FC' = CC' = \underline{\sin 3\alpha} = CE + EC' = CE + BB' <$$
$$< CB + BB' = 2\sin\alpha + \sin\alpha = \underline{3\sin\alpha}.$$

Ezzel az adott kettős egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Barabás György (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. $\alpha = 0°$ és $\alpha = 30°$ mellett $2\sin\alpha = \sin 3\alpha$, eszerint az egyenlőtlenség első részének érvényessége nem terjeszthető ki az adott intervallumot magában foglaló hosszabb intervallumra. A második rész viszont – amint $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha < 3\sin\alpha$-ból látható – fennáll, ha $\sin\alpha > 0$, ennélfogva akkor is, ha $0° < \alpha < 180°$.

Dániel Gábor (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)