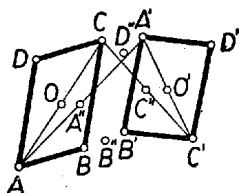


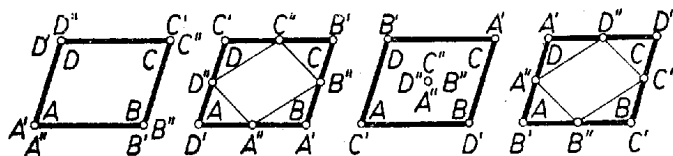
A 889. feladat megoldásaiban nem használtuk ki, hogy az adott paralelogrammák betűzésének körüljárási iránya megegyező-e vagy ellentétes, ezért a bizonyítások és az állítás érvényessége függetlenek az irányoktól. Sőt a *d)*, *e)* esetek szerint akkor is érvényes az állítás, amikor körüljárási irányról nem is lehet beszélni.¹



1. ábra

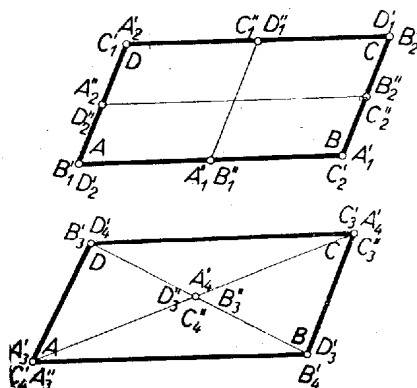
A továbbiakban ahol csak lehet, paralelogrammáinkat röviden \mathbf{P} , \mathbf{P}' , \mathbf{P}'' -vel jelöljük, az A , A' , A'' és hasonló ponthármak tagjait pedig általában X , X' , X'' -vel. Az *a)*–*c)* esetekben feltehetjük, hogy \mathbf{P} a pozitív körüljárás irányában van betűzve, ezt jelképesen így fogjuk írni: $\mathbf{P} > 0$. Hasonló jelentése van az alábbiakban $\mathbf{P}' > 0$, $\mathbf{P}' < 0$ -nak. \mathbf{P}'' betűzése 8-féle lehet (körüljárás a 4 kezdőpont valamelyikéből, 2 irányban).

Az *a)* eset $\mathbf{P}' > 0$ betűzéseire hasonlatszerűen, tágabb értelemben azt mondhatjuk, hogy bennük az X' -k X -hez képest \mathbf{P} kerületén 0, 1, -1 , vagy 2 „oldallal” elfordulnak.



2. ábra

Így rendre a négy XX' szakaszból mindegyiknek 0 a hossza, ill. mindegyik $\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}'$ -nek egy oldalával azonos, és pedig mindegyik más oldallal (két betűzés ilyen), ill. mindegyik egy átlóval azonos (2. ábra); – így \mathbf{P}'' azonos rendre \mathbf{P} -vel, ill. (két esetben) a \mathbf{P} oldalfelező pontjaival meghatározott paralelogrammával, ill. elfajult \mathbf{P} középpontjává. – $\mathbf{P}' < 0$ mellett 2 betűzésben a négy XX' szakasz egyike sem 0 hosszúságú, 2-ben pedig két XX' szakasz 0-val egyenlő.



3. ábra

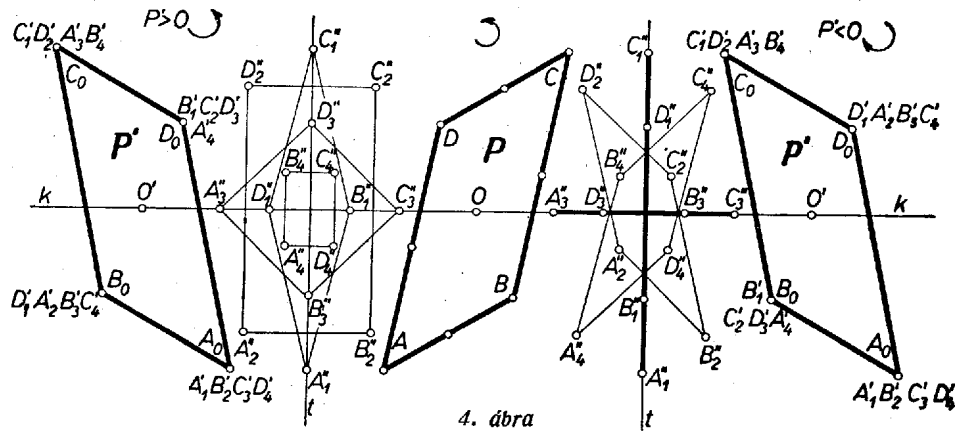
Az előbbi 2 esetben (3. ábra felső része, egyszerre vagy csak az 1-es, vagy csak a 2-es indexű X' , X'' pontokat tekintsük) mind a négy X'' egy-egy oldalt felez, párosával ugyanazt az oldalt, tehát \mathbf{P}'' a \mathbf{P} -nek valamelyik középponálává fajul el – mint *e)*-ben \mathbf{P} ; az utóbbi 2 esetben (3. ábra alsó része 3 és 4 indexszel) \mathbf{P}'' egyik átlója azonos \mathbf{P} megfelelő átlójával, másik átlója pedig elfajultan O -ba esik.²

\mathbf{P}'' alakját és állását illetően ugyanezen eredményekre jutunk a *c)* esetekben, mert \mathbf{P} -nek a K középpontra való \mathbf{P}' tükörképét úgy is megkaphatjuk, hogy \mathbf{P} -t előbb a saját O középpontjára tükrözzük (így önmagába megy át, ez az *a)* eset), majd az OK irányban $2OK$ -val eltoljuk. \mathbf{P}'' nyolc alakja a felezések folytán az előző eredményekből OK -val való eltolás útján jön létre.

A *b)* esetben legyen a tengely t , és az X pont t -re való tükörképének állandó, a betűzéstől független jele X_0 . Itt először a természetesebb $\mathbf{P}' < 0$ betűzéseket tekintjük (tengelyes tükrözéssel a körüljárási irány ellentétesre fordul).

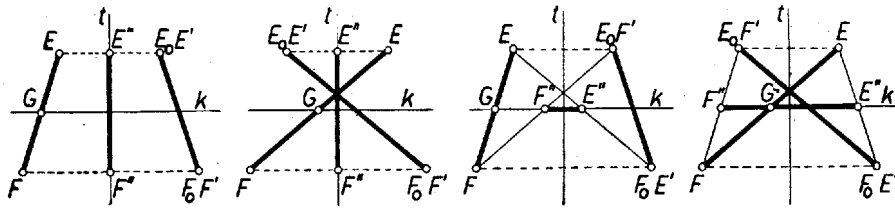
¹ Az érvényesség nem a tetszés szerinti pontnégyes oldalfelező pontnégyese által alkotott „paralelogrammára” vonatkozó állítás (I. megoldás) általános megfogalmazásán múlik – mint némely dolgozat állítja. – Arra a fogalmazásra, mint a megoldás is említi, egyező körüljárású betűzéseknél is szükség van, lásd 1. ábra.

² \mathbf{P} -nek hasonló elfajulását szó szerint nem tűztük ki vizsgálatra, de *d)* ezeket is magában foglalja, akárcsak *e)*-t is. – Szerk.



Ha minden $X' \equiv X_0$, akkor minden X'' a t -n van, és így P'' a t egy szakaszává fajul el (4. ábra jobb oldali 2/3 része az 1 indexszel, itt van a többi $P' < 0$ betűzés is a 2–4 indexekkel, a $P' > 0$ betűzések pedig a bal oldali 2/3 részben; a P idom az ábra két felére közös, így jobban látszik, hogy a nyolc P'' -nek 32 csúcsa ugyanaz a 16 pont, más-más csoportosításban).

A továbbiak előkészítéséül tekintsük egy EF szakasszá elfajult P esetét (5. ábra) és mellőzzük azt a (még egyszerűbb) esetet, ha e szakasz merőleges t -re.



Így EF és a t -re való E_0F_0 képe egy egyenlő szárú trapéz csúcsait adja, abban e két szakasz vagy az átlók, vagy a szárak szerepét játssza aszerint, hogy t metszi-e EF -et, vagy nem. Ha $E' \equiv E_0$ és $F' \equiv F_0$, akkor $E''F''$ az EF -nek t -n való vetülete; $E' \equiv F_0$ és $F' \equiv E_0$ esetén pedig $E''F''$ a k középvonalnak a szárak, ill. az átlók közti szakasza, felezőpontja t -re esik, és $E''F''$ hossza annyi, mint EF -nek k -ra való vetülete. – E segédétel alkalmazásaiban k -t úgy értelmezzük, mint az EF szakasz G felezőpontján átmenő, t -re merőleges egyenest.

Már most abban a $P' < 0$ betűzésben, amelyben minden X' a P' idom X_0 -ból induló átlójának másik végpontjába jut (3-as index), kérdésünk megoldható a segédétel kétszeri alkalmazásával: EF -nek AC -t, ill. BD -t véve így mindkétszer $G \equiv O$, $k = OO'$; eszerint $A''C''$ és $B''D''$ k -ra esnek, P'' ismét szakasszá fajul. – A hátralevő két $P' < 0$ betűzés melletti P'' -k nem mutatnak említendő érdekességet, egymásnak t - és k -ra tükörképei (2-es és 4-es index).

A $P' > 0$ betűzések közül az 1-es és 3-as indexűben AC és BD -re alkalmazhatjuk segédételünket, a 2-es indexűben AB és CD -re, a 4-esben AD és BC -re (G szerepét átveszik P megfelelő oldalainak felezőpontjai). Mind a négy P'' -nek t és k tengelye, az előbbi kettő rombusz, mert csúcsaik a tengelyeken vannak, az utóbbi kettő téglalap. Ez abból következik, hogy $A_2''B_2'' = C_2''D_2''$ és $A_2''D_2'' = B_2''C_2''$, mint $AB = CD$, ill. $AD = BC$ -nek k irányára való vetületei, és felezőpontjuk t -n van.

A d) és e) esetek – a várakozással ellentétben – nem mutatnak biztosan bekövetkező, említésre érdemes szabályszerűséget, az f) esetben pedig P'' nyilvánvalóan P -nek felére kicsinyített képe, P' -nek O' „középpontjából” szerkesztve.

Náray Miklós (Budapest, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Többen félreértették a feladat szövegét (amely valóban kissé „szokatlan”, diszkusszió-jellegű kérdéseket tett fel), pl. a második mondatban felsorolt a)– f) esetekben rendre újra és újra bizonyították a 889. feladatban már bebizonyított tételt. Nemcsak hogy lehet választ adni a szöveg első mondatára a második mondat nélkül, hanem csak így lehet. A második mondat új irányú kérdést vet fel. Az első mondatra adott válasz nem teszi a tételt általánosabban érvényessé, hanem a vizsgálatban tisztázódik, jobban tudatosodik számunkra a tétel érvényességi köre. Hasonló a céljuk, de más irányban az a)– f) kérdéseknek, olyan esetek felsorolásával, amelyekre legtöbbször „nem is gondoltak volna”. (Pedig a lehetőségeket nem is meríthetjük ki; nem tekintettünk pl. forgatásokat P és P' között, nem gondoltunk a térre, pedig P és P' síkjai különbözők is lehetnek, stb.; másrészt nem vizsgáltuk a tétel megfordítását.)

Az egyszerű és érdekes 889. feladattal kapcsolatban egyrészt arra kívántunk rámutatni, hogy amikor kérdéseket – szokás szerint – egyetlen ábrához kapcsolódva vizsgálunk meg, mennyi lehetőség marad rejtve előlünk; másrészt arra, hogy a matematikában nemcsak számítási, szerkesztési, bizonyítási feladatok lépnek fel, hanem néha bizonyos tényeket: alakokat, elfajulásokat, helyzeteket, kapcsolatokat le is kell írunk. Ilyesmik voltak azok, „amiket P'' -ről mondhattunk.”