Legyen a sorozat különbsége d, tagjainak száma n, másrészt tegyük fel, hogy k tagja a sorozatnak, és sorszáma m. Ekkor nyilván $1<m<n$, másrészt a feltevés folytán vagy $e<k<u$, vagy $e>k<u$; és

$$u=e+(n-1)d,\quad k=e+(m-1)d,\quad \text{így}$$
$$d=\frac{u-e}{n-1}=\frac{k-e}{m-1},$$

tehát az adott számokat a jobb oldalra gyűjtve

$$\frac{m-1}{n-1}=\frac{k-e}{u-e}. \tag{1}$$

Itt a bal oldalnak két természetes szám hányadosának kell lennie, eszerint k csak akkor lehet tagja a sorozatnak, ha a $(k-e)/(n-e)$ hányados is (1-nél kisebb) pozitív racionális szám. (A feltevésnél fogva ez a hányados biztosan 0 és 1 közé esik, de nem feltétlenül racionális.)

Fordítva, ha $e \lesseqgtr k \lesseqgtr u$, és egyszerűsítve

$$\frac{k-e}{u-e}=\frac{p}{q}$$

ahol p, q relatív prim természetes számok, $p<q$, akkor található – éspedig végtelen sok – olyan számtani sorozat, amelynek e, k és u tagjai. Ugyanis megadható a fentieknek megfelelő m, n számpár:

$$\frac{m-1}{n-1}=\frac{k-e}{u-e}=\frac{p}{p}=\frac{tp}{tq}$$

-ból $m=tp+1$, $n=tq+1$, ahol t bármely természetes szám.

Az adott számpéldákban a tagok száma is adva van, így $tq+1=100$-ból $tq=99$, tehát a válasz csak akkor lesz igenlő, ha a $(k-e)/(u-e)$ hányados értékére olyan 0 és 1 közti racionális szám adódik, amelynek egyszerűsíthetetlen alakjában a nevező 99-nek (1-nél nagyobb) osztója: 3, 9, 11, 33, vagy 99. – Ez a követelmény az *a)* példában nem teljesül: $(k-e)/(u-e)=342/999-38/111$, a *b)* példában viszont teljesül, mert

$$\frac{k-e}{u-e}=\frac{16\sqrt{3}-12\sqrt{2}}{36\sqrt{3}-27\sqrt{2}}=\frac{4(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{9(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}=\frac{4}{9},$$

és $q=9$ szerepel a megengedett nevezők között. (Mivel e hányados 0 és 1 közé esik, nem szükséges vizsgálnunk, hogy k közéje esik-e e-nek és u-nak.) Valóban $u-e=99d=36\sqrt{3}-27\sqrt{2}$-ből $d=(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})/11$, másrészt

$$\frac{4}{9}=\frac{44}{99}=\frac{m-1}{n-1}$$

-ből $m=45$, és így a sorozat 45-ik tagja:

$$e+44d=(81\sqrt{2}-64\sqrt{3})+\frac{44}{11}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})=69\sqrt{2}-48\sqrt{3}=k.$$

Kisvölcsey Jenő (Budapest, Piarista g. IV. o. t.).