I. megoldás: Élérintő gömb létezéséhez elegendő a tetraéderre vonatkozó feltevéseknek már az a része is, hogy egy lap szabályos – más szóval 3 nem szemköztes él egyenlő –, valamint hogy a további 3 – egy csúcsba összefutó, és így ugyancsak nem szemköztes – él ugyancsak egyenlő. Így ugyanis teljesül a 879. feladatban bebizonyított elegendő feltétel:[1] mindhárom szemköztes él–pár összege ugyanakkora, hiszen az (u oldalú) ABC szabályos háromszöget alapnak véve az ezzel szemközt fekvő D csúcsban összefutó (v hosszúságú) élek oldalélek, és minden szemköztes él–párt egy alapél és egy oldalél alkot, így mindhárom összeg értéke $u+v$. Másrészt a kiemelt rész–feltevésekből az ortocentrikusság is következik. Ugyanis az előbbi v–élek egyenlősége folytán D-nek az ABC síkra való D' vetületére $D'A = D'B = D'C$, tehát D' azonos az ABC háromszög O középpontjával; így pedig $D'A \equiv OA \perp BC$, ennélfogva $DA \perp BC$, és ugyanez áll a többi szemköztes él–párra.

A feltétel szükséges voltának bizonyításához tegyük fel, hogy az $ABCD$ ortocentrikus tetraédernek – melynek szemben fekvő él–párjai $AB = c$ és $CD = f$, $BC = a$ és $AD = d$, $CA = b$, és $BD = e$ – van élérintű gömbje. Így teljesül az élérintő gömb létezésének szükséges feltétele:[2]

$$a + d = b + e = c + f = \text{állandó} = p. \tag{1}$$

Másrészt az ortocentrikusság feltevéséből a 887. feladatban bebizonyított tétel szerint[3]

$$a^2 + d^2 = b^2 + e^2 = c^2 + f^2 = \text{állandó} = r. \tag{2}$$

Most már (1) négyzetéből (2)-t levonva, majd 2-vel osztva

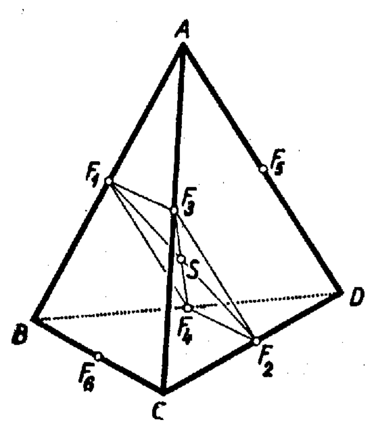
$$ad = be = cf = \frac{1}{2}(p^2 - r) = q. \tag{3}$$

(1) és (3) egybevetéséből látjuk, hogy az a, d, a b, e és a c, f számpárok mindegyike ugyanazon másodfokú egyenletnek, $x^2 - px + q = 0$-nak gyök–párjával egyenlő. Eszerint tetraéderünkön legfeljebb kétféle élhosszúság fordulhat elő, mindegyik 3-szor, és szemközti élek csak akkor egyenlők, ha mind a 6 él egyenlő. (Létező tetraéderből indultunk ki, így a gyökök biztosan valósak.)

Legyenek az egyenlet gyökei, a két élhossz: u és v, és tekintsük a tetraéder egy v hosszúságú v_1 élét. Ehhez a végpontjain minden más él csatlakozik – kivéve a vele szemben fekvő u hosszúságú u_1 élt –, mindegyik végponton 2 él. A két további v-él : v_2 és v_3 a v_1-nek vagy ugyanazon végpontjához kapcsolódik, vagy két különbözőhöz. Az előbbi esetben megtaláltuk a tetraéder egyenlőélű csúcsát, legyen ez D, a v-élek „szabad” végpontjai pedig A, B, C. Így a DA, DB, DC éllel szemben fekvő BC, CA, AB élek hossza u, tehát az ABC háromszög szabályos. – Ha pedig v_2 és v_3 a v_1-nek két különböző végpontjához, A' és B'-höz kapcsolódik pl. A'-hoz v_2 és ennek szabad végpontja C', akkor a B'-ből kiinduló $B'D'$ él hossza u, mert szemben fekszik $A'C'$-vel, így a B'-ből kiinduló v_3 él másik végpontja ugyancsak C'. Eszerint az $A'B'C'$ háromszög minden oldala, éle v, a szemben fekvő u-élek pedig D-ben futnak össze. – Ezzel bebizonyítottuk a kimondott feltétel szükséges voltát.

Gyene András (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A fentivel lényegében azonos megoldásra jutunk, ha a tetraédernek az ortocentrikussággal ekvivalens azon tulajdonságából indulunk ki, hogy éltengelyei (a szemközti élek felezőpontjait összekötő F_1F_2, F_3F_4, F_5F_6 szakaszok) egyenlők,[1] ami azt is jelenti, hogy az $F_1F_3F_2F_4$, $F_1F_5F_2F_6$ és $F_3F_5F_4F_6$ paralelogrammák derékszögűek.



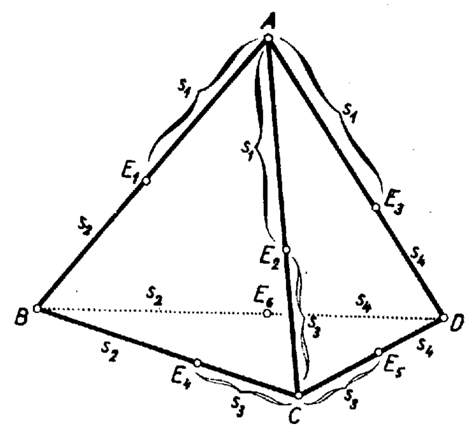
1. ábra

[1]Lásd KML. XVII. kötet, 99-101. o. (1958. november).
[2]Lásd KML. XVI. kötet, 5. o. (1958. január).
[3]Lásd KML. XVII. kötet,112–114. o. (1958. november).
[1]Lásd KML. XVI. kötet 35. o. (1958. február).

E téglalapok az átlókon felül a kerület mértékszámában is megegyeznek, mert (1) alapján pl. az elsőnek a kerülete: $F_1F_3 + F_3F_2 + F_2F_4 + F_4F_1 = (F_1F_3 + F_2F_4) + (F_3F_2 + F_4F_1) = BC + AD = a + d = p$. Így pedig egybevágók, mert egyszerű számítás mutatja, hogy az átló és a kerület a téglalap oldalait egyértelműen meghatározza. Eszerint a lapok F_1F_3, F_1F_4, $\ldots$, F_4F_6 középvonalai között csak kétféle hosszúság fordulhat elő, ennélfogva a 2-szer akkora élek között is, amit fentebb tisztán számítással mutattunk meg.

Gaál Sándor (Veszprém, Lovassy L. g. IV. o. t.)

II. megoldás: A feltétel szükséges voltát a csúcsokból az él–érintő gömbhöz húzható érintőszakaszok (él–részek) vizsgálatával is bebizonyíthatjuk.



2. ábra

Az éleket ezekkel kifejezve $a = s_2 + s_3$, $d = s_1 + s_4$, $b = s_1 + s_3$, $e = s_2 + s_4$, $c = s_1 + s_2$, $f = s_3 + s_4$ és az ortocentrikusság feltétele így alakul:

$$(s_2 + s_3)^2 + (s_1 + s - 4)^2 = (s_1 + s_3)^2 + (s_2 + s_4)^2 = (s_1 + s_2)^2 + (s_3 + s_4)^2.$$

és innen

$$s_2s_3 + s_1s_4 = s_1s_3 + s_2s_4 = s_1s_2 + s_3s_4.$$

Az első egyenlőségből átrendezéssel $(s_1 - s_2)(s_4 - s_3) = 0$, vagyis az $s_1 = s_2$ és $s_3 = s_4$ egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül. Hasonlóan a második egyenlőségből vagy $s_1 = s_4$, vagy $s_2 = s_3$, vagy mindkettő fennáll.

Ha pl. $s_1 = s_2$ és $s_1 = s_4$, akkor az ABD háromszög szabályos, mert mindegyik oldala $2s_1$, és a C-be befutó 3 él is egyenlő: mindegyiknek $s_1 + s_3$ a hossza. Bárhogy kapcsolunk össze az előbbi 2–2 egyenlőségből 1–1-et, mind a 3 további ilyen esetben hasonló eredményre jutunk. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Kelemen József (Szentgotthárd, Vörösmarty M. g. IV. o. t.)