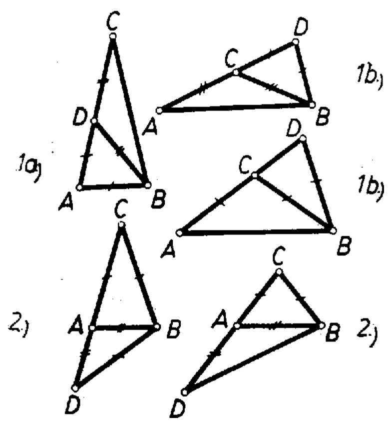
I. megoldás: A feladat szövege a D pontnak AC-n való kitűzését kétféleképpen teszi lehetővé: A-tól vagy C oldalán, vagy AC-nek A-n túl való meghosszabbításán. Aszerint is két lehetőséggel kell számolnunk D helyzetére, hogy az első esetben az ABC egyenlő szárú háromszög alapja kisebb, vagy nagyobb a száránál. Végül első hallásra a BCD háromszög egyenlő szárú voltát is háromféleképpen képzelhetjük el, ugyanis bármelyik két oldalának egyenlőségére gondolhatunk. Mindenesetre $D \not\equiv C$, különben BCD elfajult háromszög lenne, tehát $AB = AD \neq AC$, $ACB\sphericalangle \neq 60^\circ$. E kérdéseknek minden lehető módon való megválasztása után esetről esetre kiszámíthatjuk az ABC háromszög szögeit (ugyanis az ABD és BCD háromszögek egyenlő szárú voltából további egyenletet kapunk a két ismeretlen szögére), és ennek alapján adunk választ a kérdésre.



1. *a)* Legyen AD egyirányú AC-vel és $AB < AC$; így D az AC szakaszra esik. Ekkor $BAC\sphericalangle > 60^\circ$, $BDC\sphericalangle = 90^\circ + BAD\sphericalangle/2 > 120^\circ$, tompa szög, így a BDC háromszög csak úgy lehet egyenlő szárú, ha $DB = DC$. Ekkor, $BAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$ és $ACB\sphericalangle = \gamma$ jelölésekkel mindenképpen $2\alpha + \gamma = 180^\circ$, továbbá feladatunkban $BDC\sphericalangle = 90^\circ + \alpha/2 = 180^\circ - 2\gamma$, és ebből $\alpha = 540^\circ/7$, $\gamma = 180^\circ/7$. Így az ABC háromszög, vagy ami ugyanaz, a γ szög megszerkesztése egyértelmű a szabályos 14-szög szerkesztésével, erről pedig tudjuk, hogy euklidészi értelemben nem szerkeszthető meg.

1. *b)* Legyen AD egyirányú AC-vel és $AB > AC$, tehát D az AC-nek C-n túli meghosszabbításán van. BCD-ben nem lehet $CB = CD$, mert ez a feltevés $AB = AD = AC + CD = AC + CB$-re vezet, és így az ABC háromszög nem létezik. Így két lehetőség marad BCD egyenlő szárúságára: $DB = DC$-ből $ADB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha/2$ révén $DCB\sphericalangle = 90^\circ - ADB\sphericalangle/2 = 45^\circ + \alpha/4 = CAB\sphericalangle + CBA\sphericalangle = 2\alpha$-ból $\alpha = 180^\circ/7$, ami ismét nem szerkeszthető; $BC = BD$-ből pedig $\alpha = 36^\circ$, ez viszont a szabályos 10-szög szerkeszthetősége folytán szerkeszthető.

2. Legyen AD ellentétes irányú AC-vel. Ekkor $BDC\sphericalangle = \alpha/2$ és $CBD\sphericalangle = 3\alpha/2 > BDC\sphericalangle$, tehát a BDC háromszög kétféleképpen lehet egyenlő szárú $BC = BD$-vel, amiből $\alpha/2 = 180^\circ - 2\alpha$, és így $\alpha = 72^\circ$, ami szerkeszthető, – ill. $BD = CD$-vel, amiből $3\alpha/2 = 180^\circ - 2\alpha$, és így $a = 360^\circ/7$, nem szerkeszthető.

Arató Péter (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. A három megszerkeszthetetlen eset ábrái csak abban különböznek, hogy az A, D, C betűk ciklikusan permutálódnak.

2. A versenyzők többsége nem tért ki valamennyi lehetőségre.

II. megoldás: Trigonometriai ismeretekre támaszkodva is válaszolhatunk a kérdésre. Lényegében az a kérdés, megszerkeszthető-e az ABC háromszög $AC = BC = a$ szárából az $AB = c$ alap (vagy fordítva), más szóval a c/a arányszám, amelynek fele a $BAC\sphericalangle = \alpha$ koszinuszát adja.

Vegyük hosszúságegységnek a szárat: $a = 1$, így a háromszög-egyenlőtlenségből $0 < c < 2$, másrészt $\cos\alpha = c/2$. Fejezzük ki a kérdéses BCD háromszögnek a szerkesztéssel létrejött oldalait. A $BD = d$ szakasz hossza vagy $2c\sin\alpha/2$, vagy $2c\cos\alpha/2$ aszerint, hogy AB-t A-tól C felé, ill. az ellentétes irányba mértük fel, ugyanis az ABD egyenlő szárú háromszög szárai közti szög eszerint lesz α, ill. $180^\circ - \alpha$. A félszög függvényeit $\cos\alpha = c/2$-vel kifejezve $d^2 = 2c^2(1 \mp \cos\alpha) = c^2(2 \mp c)$. Másrészt CD hossza $1 - c$, ill. $c - 1$ aszerint, hogy $c \leq 1$, ill. $c > 1$ vagy pedig $1 + c$. Így a BCD egyenlő szárú háromszögben BD csak szár lehet, ugyanis a $CD = BC$ feltevés $1 \mp c = 1$-gyel $c = 0$-ra, ill. $c - 1 = 1$-gyel $c = 2$-re vezet, és az ABC háromszög egyik esetben sem létezik. Aszerint, hogy a másik szár szerepét BC játssza-e, vagy CD, két esetet kell vizsgálnunk.

1. $BD = BC = 1$, azaz $d^2 = c^2(2 \mp c) = 1$-gyel $c^3 - 2c^2 + 1 = 0$, vagy $c^3 + 2c^2 - 1 = 0$. Könnyű belátni, hogy az első egyenletnek $c = 1$, a másodiknak pedig $c = -1$ gyöke, számunkra azonban egyik sem valóságos megoldás, mert $c = 1$ mellett D egybeesik C-vel, a negatív gyöknek pedig itt nincs értelme. Az egyenletek bal oldalát a megfelelő $c - 1$, ill. $c + 1$ gyöktényezővel osztva a további gyökök $c^2 - c - 1 = 0$, ill. $c^2 + c - 1 = 0$-ból: $c = (1 \pm \sqrt{5})/2$, ill. $c = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Ezek mint szakaszok megszerkeszthetők, mert a $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt az 1 és 2 befogójú derékszögű háromszög átfogójaként kaphatjuk.

A nagyobb gyökök $c = 1{,}618\ldots$, ill. $c = 0{,}618\ldots$, velük háromszög szerkeszthető, a megfelelő szögek $\alpha = 36^\circ$, ill. $\alpha = 72^\circ$; a kisebb gyökök negatívok.

2. $BD = CD$-vel a $CD = \pm(1-c)$ esetekben $c^2(2-c) = 1-2c+c^2$-ből

$$c^3 - c^2 - 2c + 1 = 0, \tag{1}$$

a $CD = 1+c$ esetben pedig $c^2(2+c) = 1+2c+c^2$-ből a

$$-c^3 - c^2 + 2c + 1 = 0 \tag{2}$$

egyenletre jutunk. Az utóbbit a $(-c)^3-(-c)^2-2(-c)+1=0$ alakban írva látjuk, hogy gyökei (-1)-szer akkorák, mint (1) gyökei[1], ezért a szerkeszthetőség kérdésében mindkét egyenletnél ugyanarra a válaszra jutunk, így elég (1)-gyel foglalkoznunk.

Mivel (1)-ben valamennyi együttható egész szám és c^3 együtthatója 1, azért ha van racionális gyöke, az egész szám. Egész gyökként csak az állandó tag osztói: $+1$ és -1 jöhetnek szóba, de egyikük sem gyöke (1)-nek. Így (1) a racionális számtest fölött irreducibilis, egyik gyöke sem szerkeszthető meg.[2]

Szász Domokos (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A 2. esetre kapott válasz után nincs értelme kutatni, van-e egyáltalán olyan egyenlő szárú háromszög, $a=1$ szárral, amelynek c alapja eleget tesz (1)-nek, ill. (2)-nek. Mégis az I. megoldás eredményeivel való összeegyeztetés végett megjegyezzük, hogy (1) bal oldalának értéke

$$\begin{array}{rcccl} c = -2, & 0, & 1/2, & 2 & \text{esetén} \\ -7, & 1, & -1/8, & +1, & \end{array}$$

eszerint (1)-nek -2 és 0 között, 0 és 1/2 között, és 1/2 és 2 között van egy-egy gyöke, az utóbbi kettővel létezik egy-egy megfelelő háromszög, a -2 és 0 közti gyök -1-szerese pedig (2) révén ad egy háromszöget. Finomabban, 0,01 lépésekkel haladva kapjuk, hogy (1) pozitív gyökei a (0,44; 0,45) és az (1,80; 1,81) intervallumban vannak, negatív gyöke pedig a (-1,25; -1,24)-ban. Ezekből már elég jó megközelítéssel látható, hogy $\cos\alpha$ a (0,22; 0,225), (0,9; 0,905), ill. (0,62; 0,625) intervallumban van, és így α „közel jár" 180°-nak 3/7, ill. 1/7, ill. 2/7 részéhez.

[1] Ez a kapcsolat az előbbi egyenletpár esetében is fennállt.

[2] Lásd pl. *Surányi János:* A szögharmadolás kérdéséről, KML. XIV. kötet, 97-107. és 129-134 o., közelebbről 131-132. o. (1957. április-május).